Modelle der Quantenmechanik mit Zeitoperator

Dissertation
zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften
der Mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät
der Eberhard-Karls-Universität
zu Tübingen

vorgelegt von
HERMANN SOHR
aus Ringenhain (Lausitz)

1968

9712

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547601_0081

MODELLE DER QUANTENMECHANIK

MIT ZEITOPERATOR

DISSERTATION

zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften

der Mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät
der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen

vorgelegt von

Hermann Sohr
aus
Ringenhain (Lausitz)

1968

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Tag der mündlichen Prüfung: 11. Juli 1968

Dekan:

1. Berichterstatter: Professor Dr. H. Blume

2. Berichterstatter: Professor Dr. O. Tamaschke

Professor Dr. G. Ludwig

GLIEDERUNG

Einleitung 1

I. Übliche Modelle der Quantenmechanik und Modelle der klassischen Mechanik 8

§ 1. Physikalische Systeme 8

§ 2. Übliche Modelle der Quantenmechanik 14

§ 3. Modelle der klassischen Mechanik 23

§ 4. Die Konstruktion üblicher Modelle nach dem Korrespondenzprinzip 28

§ 5. Einige Definitionen und Sätze über symmetrische Algebren 30

A. Definition der verwendeten Räume 30

B. Operatoren 31

C. Funktionale 34

D. Darstellungen 35

E. Filter und Filterbasen 37

II. Vorstufen von Modellen der Quantenmechanik mit Zeitoperator 39

§ 6. Einwände gegen die üblichen Modelle der Quantenmechanik 39

A. Das Fehlen eines sinnvollen üblichen Modells mit Zeitoperator 39

B. Argumente gegen die Parameterrolle der Zeit in den üblichen Modellen 41

C. Folgerungen für das Kausalprinzip 43

D. Unzulänglichkeiten üblicher Modelle mit periodischem Potential 43

§ 7. Modifizierung üblicher Modelle der Quantenmechanik 45

A. Modifizierung durch Verzicht auf den Zeitparameter 45

B. Die Konstruktion modifizierter üblicher Modelle nach dem Korrespondenzprinzip 48

C. Auftretende Schwierigkeiten 50

D. Auswegsmöglichkeiten 51

§ 8. Darstellungen üblicher und modifizierter üblicher Modelle der Quantenmechanik 53

A. Definitionen 53

B. Sinnvolle Modelle für Systeme mit Zeitmessung 56

C. Sinnvolle Modelle mit periodischem Potential 58

§ 9. Erweiterungen üblicher und modifizierter üblicher Modelle der Quantenmechanik 59

A. Erweiterungen üblicher Modelle 60

B. Erweiterungen modifizierter üblicher Modelle 62

III. Endgültige Modelle der Quantenmechanik mit Zeitoperator 65

§ 10. Definition der Modelle 66

§ 11. Die Konstruktion positiver Funktionale auf einer Operatorenalgebra 70

A. Approximation positiver Funktionale durch Elemente von $\mathfrak{L}(\mathfrak{F}(\mathfrak{H}))$ 72

B. Eine Klasse positiver Funktionale auf $\mathfrak{L}_+(\mathfrak{H})$ 74

C. Konstruktionsverfahren und physikalische Bedeutung 75

D. Konstruktion von Fortsetzungen positiver Funktionale 78

E. Physikalische Folgerungen 84

F. Beispiele 86

§ 12. Die Konstruktion eines Modells mit Zeitoperator für ein gegebenes System $\mathfrak{H}$ 90

A. Operatoren als Limites von Filterbasen 90

B. Verallgemeinerungen der Modelle $\mathfrak{G}(\mathcal{M}_2^{\mathfrak{H}})$ und $\mathfrak{E}(\mathcal{M}_2^{\mathfrak{H}})$ 94

C. Praktische Durchführung der Konstruktion 95

§ 13. Die Heisenbergschen Unschärfenrelationen 96

§ 14. Unschärfeaussagen für Modelle mit Zeitoperator 98

A. Relationen für $Q_1, \ldots, Q_m, P_1, \ldots, P_m$ 99

B. Physikalische Bedeutung der Operatoren $e^{\frac{i}{\hbar}\alpha_\nu Q_\nu}$ und $e^{\frac{i}{\hbar}\beta_\nu P_\nu}$ für $\alpha_\nu, \beta_\nu \in \mathbb{R}$ und $\nu = 1, 2, \ldots, m$ 100

C. Gemeinsame Messbarkeit von Ort, Impuls, Zeit und Energie 103

D. Unschärfeaussagen für Ort, Impuls, Zeit und Energie 106

§ 15. Hypothese von der Messbarkeit am absoluten Nullpunkt 108

§ 16. Beispiele für Modelle der Quantenmechanik mit Zeitoperator 109

A. Das kräftefreie Elektron 109

B. Der harmonische Oszillator 112

§ 17. Über die Möglichkeit zur Beschreibung von Materieerzeugung und -vernichtung durch Modelle mit Zeitoperator 115

Literatur 117

EINLEITUNG

Die Frage nach einem Zeitoperator für die Quantenmechanik ist ein altes - merkwürdigerweise aber nicht allzusehr beachtetes - Problem. Während allen übrigen physikalischen Grössen - z. B. den Koordinaten des Ortes und des Impulses - in der Quantenmechanik ein Operator entspricht, ist es bisher nicht gelungen, auf sinnvolle Weise einen Zeitoperator zu definieren.[1)]

Das Fehlen eines Zeitoperators führt dazu, dass die Zeit in der Quantenmechanik ausschliesslich die Rolle eines Parameters spielt - genau wie in der klassischen Mechanik. Je nachdem, ob das Heisenberg-, Schrödinger- oder Wechselwirkungsbild der Quantenmechanik verwendet wird ([4, Kap. IV]), hängen entweder die Orts- und Impulsoperatoren oder die Zustandsvektoren des Hilbertraumes oder beides zusammen vom Zeitparameter ab.

E. Schrödinger hat auf die Probleme aufmerksam gemacht, die das Fehlen eines Zeitoperators in der Quantenmechanik mit sich bringt ([10]). Eine Quantenmechanik ohne Zeitoperator steht nicht im Einklang mit der Relativitätstheorie, da die Zeit eine Auszeichnung von prinzipieller Art erfährt. (Sonderstellung der Zeit, [10, S. 243]) Der Verzicht auf einen Zeitoperator ist jedoch auch aus anderen Gründen fragwürdig (§ 6).

Wenn ein Zeitoperator T sinnvoll sein soll, dann muss er mit dem Hamiltonoperator H der Vertauschungsrelation $TH - HT = \frac{\hbar}{i} I$ [2)] genügen. Das entspricht einerseits dem Korrespondenzprinzip (die Zeit und - bis auf ein Vorzeichen - die Energie sind in der klassischen Mechanik ein kanonisches Variablenpaar ; daher die gleiche Vertauschungsrelation wie für die Orts- und Impulsoperatoren) und andererseits der Erfahrung (analog zu den Heisenbergschen Unschärferelationen erhält man eine im Einklang mit dem Experiment stehende Energie-Zeit-Unschärferelation).

---

1) Vergl. dazu W. Pauli [9, S. 60, Fussnote], E. Schrödinger [10, S. 242 unten] und H. Paul [8]

2) I sei der Einsoperator, h das Plancksche Wirkungsquantum und $\hbar = \frac{h}{2\pi}$

E. Schrödinger vermutet, dass es der Zeitparameter der Quantenmechanik ist, der die Konstruktion eines solchen Zeitoperators unmöglich macht ([10]). Diese Vermutung bestätigt sich (§ 6, A). F. Engelmann und E. Fick haben einen Versuch zur Einführung eines derartigen Zeitoperators neben dem Zeitparameter unternommen ([2]). Dieser Versuch kann jedoch, wie H. Paul in [8] ausführlich begründet, als gescheitert angesehen werden.

Es erhebt sich nun die Frage, ob man in der Quantenmechanik auf den Zeitparameter verzichten kann. Eine Quantenmechanik mit Zeitoperator wird nur eine Quantenmechanik ohne Zeitparameter sein können. Auch andere Einwände sprechen gegen den Zeitparameter (§ 6, B). Der Verzicht auf diesen Parameter könnte daher sinnvoll sein. Jedoch schreibt E. Schrödinger über diesen Punkt ([10, S. 243]) : " Es erscheint ungeheuer schwer, auf diesen letzten scharfen Parameter, der noch übriggeblieben ist, zu verzichten."

Wir meinen, dass es doch möglich ist, eine sinnvolle Quantenmechanik mit Zeitoperator und ohne Zeitparameter aufzubauen. Ohne Zeitparameter! Das bedeutet, dass weder die Operatoren des Ortes und des Impulses noch die Zustandsvektoren im Hilbertraum von der Zeit abhängen. Der Aufbau einer solchen Theorie ist das Ziel der vorliegenden Arbeit.

Die Abschnitte I und II dienen der Herleitung und Begründung unserer Theorie.

Es ist die Aufgabe einer physikalischen Theorie, einen Ausschnitt der Erfahrung auf ein mathematisches Modell abzubilden ([4, Kap.I, § 1]). Ein Ausschnitt der Erfahrung kann nur durch eine Menge von Messvorschriften gekennzeichnet werden. Eine bestimmte Menge solcher Messvorschriften werden wir in § 1 als physikalisches System bezeichnen. (Es hat sich noch keine Standard-Definition dieses Begriffes durchgesetzt.) Jedes mathematische Modell, das wir betrachten, wird dann einem physikalischen System zugeordnet sein.

Unter einem mathematischen Modell werden wir durchweg ein Quadrupel (a, b, c, d) verstehen. Bei den Modellen der Quantenmechanik wird a ein Hilbertraum und b eine Abbildung des physikalischen Systems in oder auf die Menge der Projektionsoperatoren von a sein ; c wird ein Operator oder eine Schar von Operatoren (z.B. in a) sein (Hamiltonoperatoren) und d wird eine Definition sein, in der die Zustände des Systems und die Wahrscheinlichkeitsaussagen in den Zuständen festgelegt werden (d ermöglicht den Vergleich des Modells mit der Erfahrung).

Wir werden mehrere mathematische Modelle für ein physikalisches System diskutieren und prüfen, ehe wir zu einem Modell gelangen, das allen Anforderungen gerecht wird. Unsere endgültigen Modelle für physikalische Systeme werden Modelle mit Zeitoperator und ohne Zeitparameter sein. Die Zeit wird den Koordinaten des Ortes und - bis auf ein Vorzeichen - die Energie den Koordinaten des Impulses gleichgestellt sein. Die Operatoren des Ortes, des Impulses, der Zeit und - bis auf ein Vorzeichen - der Energie werden den bekannten Vertauschungsrelationen der üblichen Theorie (z.B. [4]) genügen.

Natürlich ist es unmöglich, auf mathematischem Wege zu beweisen, dass ein mathematisches Modell physikalisch sinnvoll ist, d.h. nach Vergleich vermöge d mit der Erfahrung übereinstimmt. Ein solcher Nachweis ist höchstens auf experimentellem Wege möglich. Es stehen jedoch wichtige Kriterien für die "Richtigkeit" eines mathematischen Modells zur Verfügung. Wir zählen einige dieser Kriterien auf :

a) Korrespondenzprinzip. Dieses Prinzip fordert eine Strukturähnlichkeit der Modelle der klassischen Mechanik und der Quantenmechanik ([4, Kap. I, § 7]) ; wir können es auch auf die Modelle der Quantenmechanik untereinander anwenden.

b) Forderung nach Einheitlichkeit. Es ist unwahrscheinlich, dass ein "richtiges" Modell Strukturen grundverschiedenen Charakters enthält (wie z.B. der "klassische" Zeitparameter in einem Modell der Quantenmechanik).

c) Grundlegende experimentelle Tatsachen. Z.B. muss die Struktur eines Modells der Quantenmechanik die Formulierung von Unschärfeaussagen für Ort, Impuls, Zeit und Energie ermöglichen.

d) Anwendbarkeit auf spezielle besonders gut bekannte physikalische Systeme ("Testfälle"). Z.B. muss ein Modell für den harmonischen Oszillator oder für das Wasserstoffatom mit der Erfahrung übereinstimmen.

Diese Kriterien werden für die Herleitung und Begründung unserer Modelle von entscheidender Bedeutung sein.

Die Grundidee, die den Aufbau unserer Theorie mit Zeitoperator ermöglicht, kann folgendermassen skizziert werden :

Die Struktur der Modelle der üblichen Quantenmechanik (kurz : "übliche Modelle") erweist sich als zu eng, um eine Theorie mit Zeitoperator aufbauen zu können. Wir werden dadurch gezwungen, nach allgemeineren Strukturen zu suchen. Solche allgemeinere Strukturen erhalten wir, indem wir Darstellungen von üblichen Modellen definieren. Jeder Darstellung σ der Operatorenalgebra des zum üblichen Modell gehörigen Hilbertraumes ordnen wir unter zusätzlichen aber weit gespannten Voraussetzungen eine Darstellung des ganzen üblichen Modells zu. Als σ-Bild eines üblichen Modells erhalten wir dann ein neues Modell. Weiter konstruieren wir ein Modell, das

alle δ -Bilder eines üblichen Modells umfasst. Insbesondere schliesst dieses umfassende Modell dann auch das übliche Ausgangs-Modell mit ein (für die identische Abbildung als δ) ; seine Struktur ist daher eine Erweiterung des üblichen Ausgangs-Modells. Solche Erweiterungen üblicher Modelle werden den Aufbau einer Theorie mit Zeitoperator ermöglichen.

Mit den δ -Bildern üblicher Modelle lassen sich auch andere Probleme lösen. Für eine passend gewählte Darstellung erhalten wir z.B. die Theorie aus [12] zur quantenmechanischen Beschreibung unendlicher Kristallgitter.

Der Abschnitt III enthält die Definition unserer endgültigen Modelle, Konstruktionsverfahren für Zustände des Systems, die Konstruktion eines speziellen Modells für ein System, die Herleitung von Unschärfeaussagen, einfache Beispiele und einige physikalische Folgerungen unserer Theorie.

Die Zustände eines physikalischen Systems werden in unseren Modellen positive Funktionale auf einer Operatorenalgebra sein. Daher benötigt man für die Anwendung Konstruktionsverfahren für solche positive Funktionale. Zu diesem Zweck eignet sich besonders die Approximation bezüglich der schwachen Topologie durch Filterbasen, deren Elemente Mengen von bekannten Funktionalen sind. Dann kann die Konstruktion der Zustände "punktweise" erfolgen - "so weit", wie es praktisch erforderlich ist. Wir wollen uns vor allem mit der Konstruktion von Fortsetzungen befassen.

Der Hamiltonoperator eines unserer Modelle wird ein Operator in einem Raum linearer Funktionale sein. Um für ein physikalisches System ein Modell angeben zu können, kommt es vor allem auf die Konstruktion eines Hamiltonoperators an. Wir werden einen solchen Operator aus dem Hamiltonoperator

eines üblichen Modells gewinnen. Seine Konstruktion wird im allgemeinen keine Schwierigkeiten bereiten.

Beim Aufstellen von Unschärfeaussagen für unsere Modelle taucht folgendes Problem auf : Zwar können analog zur üblichen Quantenmechanik "Heisenbergsche" Unschärferelationen abgeleitet werden, und zwar auch in bezug auf Energie und Zeit, doch sind sie - grob gesagt - im allgemeinen nicht mehr für die Zustände gültig, die gegenüber der üblichen Theorie "neu" hinzugekommen sind. Der Grund hierfür besteht darin, dass sich die bekannten Vertauschungsrelationen für die Orts- und Impulsoperatoren eines üblichen Modells wegen der Nichtbeschränktheit dieser Operatoren nicht notwendig auf die Darstellungen des Modells übertragen lassen. Um Unschärfeaussagen zu erhalten, gehen wir daher von solchen Relationen für die Orts- und Impulsoperatoren aus, die sich auf sämtliche Darstellungen übertragen lassen. Auf diese Weise werden wir Unschärfeaussagen bekommen, die für alle Zustände des Systems gültig sind.

Aus unserer Unschärfe-Theorie ergeben sich physikalische Folgerungen, die im Hinblick auf die übliche Quantenmechanik etwas merkwürdig sind. Wir erhalten Bedingungen für physikalische Systeme, unter denen Ort, Impuls, Zeit und Energie gemeinsam gemessen werden können. Wenn diese Bedingungen erfüllt sind, dann können die Heisenbergschen Unschärferelationen nicht gelten, d.h. das System besitzt dann höchstens solche Zustände, in denen sie nicht gelten.

Wenn wir die Bedingungen für die gemeinsame Messbarkeit von Ort, Impuls, Zeit und Energie mit der Aussage des III. Hauptsatzes des Thermodynamik verbinden, so gelangen wir zu der Hypothese, dass Ort, Impuls, Energie und Zeit am absoluten Nullpunkt gemeinsam messbar sind.

Am Schluss werden wir noch eine weitere physikalische Folgerung unserer Theorie mit Zeitoperator diskutieren. Da in dieser Theorie die Zeit den Koordinaten des Ortes gleichgestellt ist, können wir jede für den Ort gültige Aussage auf die Zeit übertragen. Genauso, wie etwa ein Teilchen nur innerhalb eines bestimmten Raumgebietes aufzutreten braucht, braucht es auch nur innerhalb einer bestimmten Zeitspanne zu existieren ; es kann entstehen und verschwinden. Damit ergibt sich die Möglichkeit, die Vorgänge der Materieerzeugung und -vernichtung beschreiben zu können, was in der üblichen Quantenmechanik nicht gelingt.

Der Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist die Quantenmechanik. Es ist üblich, darunter nur die Quantentheorie physikalischer Systeme endlich vieler Freiheitsgrade zu verstehen. Im Fall physikalischer Systeme unendlich vieler Freiheitsgrade spricht man von Quantenelektrodynamik oder Feldtheorie. Der Formalismus der üblichen Quantenmechanik kann in abgewandelter Form für die Quantenelektrodynamik übernommen werden. Es wäre interessant zu untersuchen, was man für eine Quantenelektrodynamik erhält, wenn man nicht von der üblichen sondern von unserer Theorie mit Zeitoperator ausgeht.

Die entscheidende Anregung zu dieser Arbeit habe ich durch [12] erhalten. Herr Professor Dr. O. Tamaschke, der Autor von [12], hat den Fortgang der Arbeit betreut und mir in zahlreichen Diskussionen viele Ratschläge gegeben. Dafür möchte ich ihm sehr herzlich danken.

Herrn Dr. R. Ansari möchte ich für Hinweise auf Literaturstellen danken und Herrn Dr. J. Scheiba für mathematische Diskussionen.

Schliesslich bin ich der Stiftung Volkswagenwerk zu grossem Dank dafür verpflichtet, dass sie durch Bereitstellung eines Stipendiums die Fertigstellung der Arbeit ermöglicht hat.

I. Übliche Modelle der Quantenmechanik und Modelle der klassischen Mechanik

Wir beginnen mit der Definition des Begriffes "physikalisches System", der einen Ausschnitt der Erfahrung kennzeichnet. Jedes mathematische Modell, das wir im folgenden betrachten, wird einem physikalischen System zugeordnet sein.

In den Paragraphen 2 und 3 definieren wir die Modelle der üblichen Quantenmechanik und der klassischen Mechanik. Das ist erforderlich, weil wir eine stark vereinfachte und vom allgemeinen Gebrauch etwas abweichende Formulierung verwenden wollen. Dadurch soll der Strukturvergleich mit späteren Modellen erleichtert werden ; er wird bei der Aufstellung aller weiteren Modelle eine grosse Rolle spielen (Korrespondenzprinzip). Wir werden uns vor allem auf [4] stützen.

Für den Aufbau unserer Modelle mit Zeitoperator werden wir einige Sätze und Definitionen über Banachsche symmetrische Algebren benötigen, die in der physikalischen Literatur nicht allgemein gebräuchlich sind. Wir werden sie daher am Schluss dieses Abschnitts zusammenstellen. Das geschieht auch deshalb, um die Bezeichnungen klarzustellen.

§ 1. Physikalische Systeme

Wir wollen einen Ausschnitt der Erfahrung festlegen und als physikalisches System bezeichnen. Zu diesem Zweck betrachten wir ein einfaches Beispiel. Gegeben sei ein starrer Körper, etwa eine Metallkugel. Wenn wir ihre Lage und Geschwindigkeit betrachten, so liegt ein System der Mechanik mit 6 Freiheitsgraden vor. Ziehen wir sämtliche Atome

der Kugel in die Betrachtung ein, so erhalten wir ein System mit einer im allgemeinen sehr grossen Anzahl von Freiheitsgraden. Wird lediglich die Druck- und Temperaturverteilung im Inneren der Kugel betrachtet, so spricht man von einem thermodynamischen System. Wir erhalten mehrere verschiedene Systeme für das gleiche Objekt.

Jedes System in diesem Beispiel kann durch eine Menge bestimmter Messvorschriften (für Messungen, die an der Kugel ausgeführt werden) eindeutig gekennzeichnet werden. Dabei kann man sich auf Messvorschriften beschränken, die nur die beiden Messwerte 0 und 1 zulassen. Jeder solchen speziellen Messvorschrift ist anschaulich eine mögliche Eigenschaft der Kugel zugeordnet : ergibt die Messung den Wert 1, so liege die Eigenschaft vor, andernfalls nicht. Ein Beispiel ist die Eigenschaft "die Energie ist $\leq \lambda$ " für eine reelle Zahl λ . Entsprechend können Eigenschaften für die Koordinaten des Ortes und des Impulses gebildet werden.

Das Beispiel der Kugel zeigt, dass wir einen Ausschnitt der Erfahrung durch eine Menge von Messvorschriften kennzeichnen müssen. Der - noch dazu fragwürdige - Begriff "Objekt" reicht zur Kennzeichnung nicht aus. Unter einem physikalischen System werden wir eine gewisse Menge solcher Messvorschriften verstehen.

Eine Messvorschrift ist eine genaue Anweisung über die Durchführung einer Messung. Sie besteht aus einer Vorschrift über den Aufbau einer Messanordnung, einer Bedienungsanleitung und einer Vorschrift über das Ablesen des Messergebnisses (des Messwertes). Zur Veranschaulichung kann man sich unter einer Messanordnung eine Messapparatur und ein bestimmtes "Objekt" (z.B. ein Wasserstoffatom oder ein Elektron) vorstellen, auf das sie angewendet wird. Für die folgende Theorie ist jedoch eine solche Unterscheidung nicht erforderlich.

Wir betrachten hier ausschliesslich solche Messvorschriften, die als mögliche Messwerte nur 0 und 1 zulassen. Anschaulich kann man sich vorstellen, dass jeder derartigen Messvorschrift (wie im Falle der Kugel) eine mögliche Eigenschaft des zugrundeliegenden "Objektes" zugeordnet ist ; sie liege vor oder nicht, je nachdem, ob die Messung den Wert 1 oder 0 liefert.

Gegeben seien zwei Messvorschriften E_1 und E_2 . Sie heissen gleich, wenn folgendes gilt : Jede Messung nach der Vorschrift E_1 ist nach der Vorschrift E_2 eine Messung mit dem gleichen Ergebnis und umgekehrt.

Sei $\mathfrak{E}$ eine Menge von Messvorschriften mit den möglichen Messwerten 0 und 1.

Für $E_1, E_2 \in \mathfrak{E}$ werde $E_1 \leqslant E_2$ gesetzt, wenn folgendes gilt : Jede Messung nach E_1 mit dem Ergebnis 1 ist auch nach E_2 eine Messung mit dem Ergebnis 1 und jede Messung nach E_2 mit dem Ergebnis 0 ist auch nach E_1 eine Messung mit dem Ergebnis 0.

Durch die Relation $\leqslant$ wird $\mathfrak{E}$ zu einer teilweise geordneten Menge. Denn es gilt $E \leqslant E$ für alle $E \in \mathfrak{E}$, aus $E_1 \leqslant E_2$ und $E_2 \leqslant E_1$ folgt $E_1 = E_2$ für alle $E_1, E_2 \in \mathfrak{E}$ und aus $E_1 \leqslant E_2, E_2 \leqslant E_3$ folgt $E_1 \leqslant E_3$ für alle $E_1, E_2, E_3 \in \mathfrak{E}$.

Sei $E \in \mathfrak{E}$. Wenn wir die Bedeutung der möglichen Messwerte 0 und 1 in der Vorschrift E vertauschen, so erhalten wir eine von E verschiedene Messvorschrift ; wir bezeichnen sie mit $\overline{E}$. Jede Messung nach E mit dem Ergebnis 1 bzw. 0 ist also zugleich eine Messung nach $\overline{E}$ mit dem Ergebnis 0 bzw. 1. Aus $E_1 \leqslant E_2$ folgt $\overline{E}_2 \leqslant \overline{E}_1$.

Sei $E_1, E_2 \in \mathfrak{O}$. Jedes $E \in \mathfrak{O}$ mit $E_1 \leq E$ und $E_2 \leq E$ heisse obere Schranke von $\{E_1, E_2\}$. Entsprechend wird "untere Schranke" definiert. Wenn eine obere Schranke $E^* \in \mathfrak{O}$ von $\{E_1, E_2\}$ existiert so, dass für jede obere Schranke $E \in \mathfrak{O}$ die Beziehung $E^* \leq E$ gilt, so ist E^* eindeutig bestimmt und heisse die kleinste obere Schranke von $\{E_1, E_2\}$; sie wird mit $\sup\{E_1, E_2\}$ bezeichnet. Entsprechend wird "grösste untere Schranke" definiert; sie wird mit $\inf\{E_1, E_2\}$ bezeichnet. Es gilt $\inf\{E_1, E_2\} = \sup\{\overline{E}_1, \overline{E}_2\}$.

Es bezeichne $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen. Eine Schar $\{E_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ von Messvorschriften aus $\mathfrak{O}$ nennen wir eine geordnete Schar, wenn für alle $\lambda', \lambda'' \in \mathbb{R}$ mit $\lambda' \leq \lambda''$ die Relation $E_{\lambda'} \leq E_{\lambda''}$ besteht.

$\mathfrak{O}$ heisse abgeschlossen bezüglich der Operation $E \to \overline{E}$, wenn aus $E \in \mathfrak{O}$ stets $\overline{E} \in \mathfrak{O}$ folgt. Entsprechend heisse $\mathfrak{O}$ abgeschlossen bezüglich $\{E_1, E_2\} \to \sup\{E_1, E_2\}$ bzw. $\{E_1, E_2\} \to \inf\{E_1, E_2\}$, wenn zu $E_1, E_2 \in \mathfrak{O}$ stets $\sup\{E_1, E_2\}$ bzw. $\inf\{E_1, E_2\}$ in $\mathfrak{O}$ existiert.

Wir wollen $\mathfrak{O}$ ein physikalisches System nennen, wenn einige zusätzliche Bedingungen erfüllt sind. Wenn wir die Elemente von $\mathfrak{O}$ anschaulich als Eigenschaften interpretieren, so bedeutet $\overline{E}$ die Negation oder Verneinung von E und $\sup\{E_1, E_2\}$ bzw. $\inf\{E_1, E_2\}$ die Eigenschaft "E_1 oder E_2" bzw. "E_1 und E_2". Diese Operationen wollen wir in einem physikalischen System ausführen können. Ausserdem wollen wir uns von vornherein auf Systeme der Mechanik mit endlich vielen Freiheitsgraden beschränken, d. h. wir nehmen an, dass eine Teilmenge von Vorschriften als kanonisch ausgezeichnet ist: Die zugehörigen Eigenschaften dieser Vorschriften bedeuten die Eigenschaften des Ortes und des Impulses.

1.1 Definition : Ein physikalisches System ist eine bezüglich $E \to \overline{E}$ und $\{E_1, E_2\} \to \sup\{E_1, E_2\}$ abgeschlossene Menge $\mathcal{O}$ von Messvorschriften, in der endlich viele Paare $\{E_\lambda^\nu \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$, $\{F_\lambda^\nu \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, m)$ geordneter Scharen von Elementen als kanonisch ausgezeichnet sind.

Der Einfachheit halber bezeichnen wir das physikalische System wieder mit $\mathcal{O}$.

Ein physikalisches System $\mathcal{O}$ ist auch bezüglich $\{E_1, E_2\} \to \inf\{E_1, E_2\}$ abgeschlossen, denn es gilt $\inf\{E_1, E_2\} = \overline{\sup\{\overline{E}_1, \overline{E}_2\}}$. $\mathcal{O}$ ist also ein Verband.

1.2 Definition : Die Elemente eines physikalischen Systems $\mathcal{O}$ heissen die Eigenschaften von $\mathcal{O}$.

Sei $E \in \mathcal{O}$. Statt "Messung nach der Vorschrift E" sagen wir "Messung der Eigenschaft E" oder kurz "Messung von E". Wenn eine Messung von E das Ergebnis 1 hat, so sagen wir "E liegt vor" oder "E sei bestätigt oder festgestellt".

Sei $E \in \mathcal{O}$. Die Eigenschaft $\overline{E}$ heisse Negation oder Verneinung von E. Sei $E_1, E_2 \in \mathcal{O}$. Statt $\sup\{E_1, E_2\}$ bzw. $\inf\{E_1, E_2\}$ schreiben wir "E_1 oder E_2" bzw. "E_1 und E_2" und statt "$E_1 \leq E_2$" sagen wir "E_2 folgt aus E_1".

Die Eigenschaft "E oder $\overline{E}$" wird durch jede Messung bestätigt ("identisch wahre Eigenschaft"); "E und $\overline{E}$" kann durch keine Messung bestätigt werden ("identisch falsche Eigenschaft").

1.3 Definition: Eine geordnete Schar $\{E_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ von Eigenschaften eines physikalischen Systems $\mathcal{O}$ heisse eine Observable von $\mathcal{O}$.

1.4 Definition : Seien $\{E_\lambda^\nu \mid \lambda \in \mathbb{R}\}, \{F_\lambda^\nu \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, m)$ die kanonischen Scharen von $\mathcal{O}$. Sie werden auch als die kanonischen Observablen von $\mathcal{O}$ bezeichnet. Die Anzahl m der Paare von Scharen heisse die Anzahl der Freiheitsgrade von $\mathcal{O}$ und werde mit $f^{\mathcal{O}}$ bezeichnet.

E_λ^ν bzw. F_λ^ν werde bezeichnet als die Eigenschaft "die ν-te Ortskoordinate ist $\leq \lambda$ " bzw. "die ν-te Impulskoordinate ist $\leq \lambda$ " (für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\nu = 1, 2, \ldots, f^{\mathcal{O}}$). $\{E_\lambda^\nu \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ bzw. $\{F_\lambda^\nu \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ heisse die Observable der ν-ten Orts- bzw. Impulskoordinate von $\mathcal{O}$.

In der klassischen Mechanik wird häufig die Zeit den Koordinaten des Ortes und die mit (-1) multiplizierte Energie (kurz : "(-1) · (Energie)") den Koordinaten des Impulses formal gleichgestellt. Der bekannte Hamiltonsche Formalismus der Mechanik kann so formuliert werden, dass Zeit und (-1) · (Energie) als kanonisches Variablenpaar auftreten [3, S. 151]. Wir wollen allgemein physikalische Systeme betrachten, in denen eine Orts- bzw. Impulsobservable als Zeit- bzw. (-1) · (Energie)-Observable ausgezeichnet ist ; wir bezeichnen sie als physikalische Systeme mit Zeitmessung.

1.5 Definition : Ein physikalisches System mit Zeitmessung ist ein physikalisches System $\mathcal{O}$ (mit den kanonischen Observablen $\{E_\lambda^\nu \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ $\{F_\lambda^\nu \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, f^{\mathcal{O}})$), in dem die $f^{\mathcal{O}}$-te Ortsobservable $\{E_\lambda^{f^{\mathcal{O}}} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ als Zeitobservable und die $f^{\mathcal{O}}$-te Impulsobservable $\{F_\lambda^{f^{\mathcal{O}}} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ als (-1) · (Energie)-Observable ausgezeichnet ist : Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ sei $E_\lambda^{f^{\mathcal{O}}}$ die Eigenschaft "die Zeit ist $\leq \lambda$" und $F_\lambda^{f^{\mathcal{O}}}$ die Eigenschaft " (-1) · (Energie) ist $\leq \lambda$ ".

§ 2. Übliche Modelle der Quantenmechanik

Wir legen zunächst einige Bezeichnungen fest.

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Es bezeichne (φ, ψ) das innere Produkt von $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$ und $\|\varphi\| = \sqrt{(\varphi, \varphi)}$ die Norm von $\varphi \in \mathcal{H}$.

Sei $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ die Menge der Projektionsoperatoren im Hilbertraum $\mathcal{H}$. Der Teilraum von $\mathcal{H}$, auf den $R \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ projiziert, werde mit $R\mathcal{H}$ bezeichnet. Für $R_1, R_2 \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ werde $R_1 \leq R_2$ gesetzt, wenn $R_1\mathcal{H} \subseteq R_2\mathcal{H}$ gilt. $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ ist bezüglich $\leq$ eine teilweise geordnete Menge. Die kleinste obere bzw. grösste untere Schranke von $\{R_1, R_2\} \subseteq \mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ ist gleich dem Projektionsoperator auf das Erzeugnis bzw. auf den Durchschnitt von $R_1\mathcal{H}$ und $R_2\mathcal{H}$; sie werde mit $\sup\{R_1, R_2\}$ bzw. $\inf\{R_1, R_2\}$ bezeichnet. Beide Schranken existieren also stets. Daher ist $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ bezüglich $\leq$ ein Verband. Der Einsoperator in $\mathcal{H}$ werde mit $I_{\mathcal{H}}$ bezeichnet. Es ist $I_{\mathcal{H}} \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}$.

Sei ϕ eine Abbildung von $\mathbb{R}$ in $\mathcal{H}$. Die Ableitung von ϕ werde, falls sie existiert, mit $\dot{\phi}$ bezeichnet. (Ihre Definition erfolgt mit Hilfe des Satzes von Riesz [7, S. 101]: Durch $g_\varphi(t) = (\varphi, \phi(t))$ (für alle $t \in \mathbb{R}$) sei für jedes $\varphi \in \mathcal{H}$ eine Abbildung g_φ von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$ definiert. Wenn für jedes φ die Ableitung $\dot{g}_\varphi$ im üblichen Sinn existiert und wenn die Zuordnung $\varphi \to \dot{g}_\varphi(t)$ für jedes $t \in \mathbb{R}$ ein beschränktes lineares Funktional auf $\mathcal{H}$ ist, so existiert nach [7, S. 101] zu jedem t ein $\dot{\phi}(t) \in \mathcal{H}$ so, dass $(\varphi, \dot{\phi}(t)) = \dot{g}_\varphi(t)$ gilt für alle $\varphi \in \mathcal{H}$. Dann heisse $\dot{\phi}: t \to \dot{\phi}(t)$ die Ableitung von ϕ).

$L^2(\mathbb{R}_m)$ bezeichne den Hilbertraum der im Lebensgueschen Sinn auf dem $\mathbb{R}_m$ $(m \geq 1)$ quadratisch integrierbaren Funktionen. Dabei werde zwischen den Funktionen f_1 und f_2 nicht unterschieden, wenn $\int_{\mathbb{R}_m} |f_1(x_1, \ldots, x_m) - f_2(x_1, \ldots, x_m)|^2 dx_1 \ldots dx_m = 0$ gilt [1, S. 22].

Es bezeichne $x_\nu \cdot$ den Operator der Multiplikation mit x_ν [1, S.109] und $\frac{\partial}{\partial x_\nu}$ den Operator der Differentiation nach x_ν [1, S.109] (für $\nu = 1, 2, \ldots, m$).

Es bezeichne h das Plancksche Wirkungsquantum ; $\hbar$ sei gleich $\frac{h}{2\pi}$.

Wir wollen nun einem physikalischen System $\mathfrak{S}$ ein mathematisches Modell der Quantenmechanik zuordnen, das im Prinzip in der physikalischen Literatur allgemein gebräuchlich ist und das wir daher als übliches Modell bezeichnen. Die Elemente dieses Modells werden wir mit dem Index 1 versehen.

Definition : Sei $\mathfrak{S}$ ein physikalisches System mit den kanonischen Observablen $\{E_\lambda^\nu \mid \lambda \in \mathbb{R}\}, \{F_\lambda^\nu \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, f^{\mathfrak{S}})$.

Es sei:

1. $\mathcal{H}_1^{\mathfrak{S}}$ ein Hilbertraum,
2. $\mathcal{R}_1^{\mathfrak{S}}$ eine Abbildung von $\mathfrak{S}$ auf die Menge $\mathcal{P}_{\mathcal{H}_1^{\mathfrak{S}}}$ der Projektionsoperatoren in $\mathcal{H}_1^{\mathfrak{S}}$, so dass gilt :
   a) $\mathcal{R}_1^{\mathfrak{S}}(\bar{E}) = I_{\mathcal{H}_1^{\mathfrak{S}}} - \mathcal{R}_1^{\mathfrak{S}}(E)$ für alle $E \in \mathfrak{S}$.
   b) $\mathcal{R}_1^{\mathfrak{S}}(\sup\{E_1, E_2\}) = \sup\{\mathcal{R}_1^{\mathfrak{S}}(E_1), \mathcal{R}_1^{\mathfrak{S}}(E_2)\}$ für alle $E_1, E_2 \in \mathfrak{S}$.
   c) Es existiert eine Isometrie $V_1^{\mathfrak{S}}$ von $\mathcal{H}_1^{\mathfrak{S}}$ auf $L^2(\mathbb{R}_{f^{\mathfrak{S}}})$ so, dass $\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, d\mathcal{R}_1^{\mathfrak{S}}(E_\lambda^\nu) = (V_1^{\mathfrak{S}})^{-1}(x_\nu \cdot) V_1^{\mathfrak{S}}$ und $\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, d\mathcal{R}_1^{\mathfrak{S}}(F_\lambda^\nu) = (V_1^{\mathfrak{S}})^{-1}\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\right) V_1^{\mathfrak{S}}$ für $\nu = 1, 2, \ldots, m$ gilt.
3. $\{H_1^{\mathfrak{S}}(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ eine Schar (nicht notwendig beschränkter) Operatoren in $\mathcal{H}_1^{\mathfrak{S}}$,

4. $\mathfrak{D}_1^{\mathfrak{S}}$ die folgende Festsetzung : "Jede Abbildung ϕ von $\mathbb{R}$ in $\mathfrak{H}_1^{\mathfrak{S}}$ so, dass $-\frac{\hbar}{i}\dot{\phi}(t) = H_1^{\mathfrak{S}}(t)\phi(t)$ und $\|\phi(t)\| = 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt, heisse ein Zustand von $\mathfrak{S}$ im Modell $\mathcal{M}_1^{\mathfrak{S}}$. Für alle $E \in \mathfrak{S}$ sei $w_{\phi,t}(E) = (\mathcal{R}_1^{\mathfrak{S}}(E)\,\phi(t), \phi(t))$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Messung von E im Zustand ϕ und zur Zeit t das Ergebnis 1 liefert."

Dann heisse das Quadrupel $\mathcal{M}_1^{\mathfrak{S}} = (\mathfrak{H}_1^{\mathfrak{S}}, \mathcal{R}_1^{\mathfrak{S}}, \{H_1^{\mathfrak{S}}(t) \mid t \in \mathbb{R}\}, \mathfrak{D}_1^{\mathfrak{S}})$ ein zu $\mathfrak{S}$ gehöriges übliches Modell der Quantenmechanik.

Bei der Festlegung der Abbildung $\mathcal{R}_1^{\mathfrak{S}}$ haben wir uns auf [4, S.107] gestützt. Anstelle der Projektionsoperatoren, die wir den Eigenschaften zuordnen, werden dort die zugehörigen Teilräume verwendet. Auf die Ein eindeutigkeit dieser Zuordnung haben wir jedoch verzichtet.

Die Bedingung unter 2. c kann ohne weiteres verallgemeinert werden, indem der Hilbertraum $L^2(\mathbb{R}_{f\mathfrak{S}})$ durch eine direkte Summe $L^2(\mathbb{R}_{f\mathfrak{S}}) \oplus L^2(\mathbb{R}_{f\mathfrak{S}}) \oplus \cdots\cdots$ abzählbar vieler Summanden ersetzt wird. Dann wäre $\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda\, d\mathcal{R}_1^{\mathfrak{S}}(E_\lambda^\nu) = (V_1^{\mathfrak{S}})^{-1}\big((x_\nu \cdot) \oplus (x_\nu \cdot) \oplus \cdots\cdots\big) V_1^{\mathfrak{S}}$ und $\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda\, d\mathcal{R}_1^{\mathfrak{S}}(F_\lambda^\nu) = (V_1^{\mathfrak{S}})^{-1}\big(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_\nu} \oplus \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_\nu} \oplus \cdots\cdots\big) V_1^{\mathfrak{S}}$ in 2. c einzusetzen. Um Schreibarbeit zu sparen, haben wir auf diese Verallgemeinerung verzichtet. Sie ist z.B. dann erforderlich, wenn in der Theorie des Elektrons der Spin berücksichtigt werden soll. (In diesem Fall hat man zwei direkte Summanden zu nehmen.) Die Existenz der Isometrie in 2.c, die wir hier direkt fordern, wird in [4, Kap. III, § 8] aus einer Reihe von Forderungen an die Operatoren $\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda\, d\mathcal{R}_1^{\mathfrak{S}}(E_\lambda^\nu)$ und $\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda\, d\mathcal{R}_1^{\mathfrak{S}}(F_\lambda^\nu)$, die man Orts- und Impulsoperatoren nennt, hergeleitet (u.a. Vertauschungsrelationen). Der Kürze wegen haben wir hier davon abgesehen.

In $\mathfrak{D}_1^{\sigma}$ sind wir von der gebräuchlichen Verwendung des Begriffes "Zustand" etwas abgewichen. Im Schrödingerbild sind alle möglichen zeitlichen Entwicklungen des Systems durch die Lösungen der Schrödingergleichung $-\frac{\pi}{i}\dot{\phi}(t) = H_1^{\sigma}(t)\,\phi(t)$ bestimmt. Wir bezeichnen in $\mathfrak{D}_1^{\sigma}$ nicht wie üblich jeden einzelnen Vektor $\phi(t)$ des Hilbertraumes, sondern den "zeitlichen Gesamtablauf", die Vektorfunktion $\phi: t \to \phi(t)$ als Zustand. Es erweist sich, dass diese Bezeichnung für uns zweckmässiger ist.

Die Festsetzung $\mathfrak{D}_1^{\sigma}$ stellt den Zusammenhang zwischen der mathematischen Struktur des Modells und der experimentell gegebenen Erfahrung her. Die durch $\mathfrak{D}_1^{\sigma}$ definierten Wahrscheinlichkeiten können mit den experimentell ermittelten relativen Häufigkeiten (Anzahl der Messungen mit dem Ergebnis 1 dividiert durch die Gesamtzahl der Messungen) verglichen werden. Man kann auf diese Weise versuchen zu prüfen, ob die Struktur eines Modells mit der Erfahrung übereinstimmt. In der Praxis können nur endlich viele Messungen durchgeführt werden ; völlige Übereinstimmung wird man daher im allgemeinen nicht beweisen können. Wenn wir von einem Modell erwarten können, dass es wenigstens näherungsweise mit der Erfahrung übereinstimmt, so wollen wir es als physikalisch sinnvoll bezeichnen ; im entgegengesetzten Fall nennen wir es physikalisch sinnlos.

Einem physikalischen System können mehrere verschiedene übliche Modelle der Quantenmechanik zugeordnet sein ; möglicherweise existiert überhaupt kein solches Modell. Ob eines der Modelle, die einem System zugeordnet sind, physikalisch sinnvoll ist, kann nur experimentell entschieden werden.

Den Begriff der Isomorphie fassen wir folgendermassen :

2.2 Definition : Die zu einem physikalischen System $\mathcal{S}$ gehörigen üblichen Modelle $\mathcal{M}_1^{\mathcal{S}} = (\mathcal{H}_1^{\mathcal{S}}, \mathcal{R}_1^{\mathcal{S}}, \{H_1^{\mathcal{S}}(t) | t \in \mathbb{R}\}, \mathcal{D}_1^{\mathcal{S}})$ und $\tilde{\mathcal{M}}_1^{\mathcal{S}} = (\tilde{\mathcal{H}}_1^{\mathcal{S}}, \tilde{\mathcal{R}}_1^{\mathcal{S}}, \{\tilde{H}_1^{\mathcal{S}}(t) | t \in \mathbb{R}\}, \tilde{\mathcal{D}}_1^{\mathcal{S}})$ heissen isomorph, wenn eine Isometrie V von $\mathcal{H}_1^{\mathcal{S}}$ auf $\tilde{\mathcal{H}}_1^{\mathcal{S}}$ existiert so, dass $\tilde{\mathcal{R}}_1^{\mathcal{S}}(E) = V \mathcal{R}_1^{\mathcal{S}}(E) V^{-1}$ für alle $E \in \mathcal{S}$ und $\tilde{H}_1^{\mathcal{S}}(t) = V H_1^{\mathcal{S}}(t) V^{-1}$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt.

Wir wollen aus der weiteren Theorie einige Definitionen und Sätze herausgreifen. Es bezeichne im folgenden $\mathcal{S}$ ein physikalisches System und $\mathcal{M}_1^{\mathcal{S}} = (\mathcal{H}_1^{\mathcal{S}}, \mathcal{R}_1^{\mathcal{S}}, \{H_1^{\mathcal{S}}(t) | t \in \mathbb{R}\}, \mathcal{D}_1^{\mathcal{S}})$ ein dazugehöriges übliches Modell der Quantenmechanik.

Es gilt für alle $E_1, E_2 \in \mathcal{S}$ die Beziehung $\mathcal{R}_1^{\mathcal{S}}(\inf\{E_1, E_2\}) = \mathcal{R}_1^{\mathcal{S}}(\sup\{\overline{E}_1, \overline{E}_2\}) = I_{\mathcal{H}_1^{\mathcal{S}}} - \sup\{I_{\mathcal{H}_1^{\mathcal{S}}} - \mathcal{R}_1^{\mathcal{S}}(E_1), I_{\mathcal{H}_1^{\mathcal{S}}} - \mathcal{R}_1^{\mathcal{S}}(E_2)\} = \inf\{\mathcal{R}_1^{\mathcal{S}}(E_1), \mathcal{R}_1^{\mathcal{S}}(E_2)\}$. Sie ergibt zusammen mit $\mathcal{R}_1^{\mathcal{S}}(\sup\{E_1, E_2\}) = \sup\{\mathcal{R}_1^{\mathcal{S}}(E_1), \mathcal{R}_1^{\mathcal{S}}(E_2)\}$ die Behauptung des folgendes Satzes.

2.3 Satz : $\mathcal{R}_1^{\mathcal{S}}$ ist ein Verbandshomomorphismus von $\mathcal{S}$ auf $\mathcal{S}_{\mathcal{H}_1^{\mathcal{S}}}$.

Mit 1.2 folgt daraus, dass $\mathcal{R}_1^{\mathcal{S}}(\text{„}E_1 \text{ oder } E_2\text{"})$ auf das Erzeugnis und $\mathcal{R}_1^{\mathcal{S}}(\text{„}E_1 \text{ und } E_2\text{"})$ auf den Durchschnitt der Teilräume $\mathcal{R}_1^{\mathcal{S}}(E_1)\mathcal{H}_1^{\mathcal{S}}$ und $\mathcal{R}_1^{\mathcal{S}}(E_2)\mathcal{H}_1^{\mathcal{S}}$ projizieren.

Sei $E_1, E_2 \in \mathcal{S}$ und $E_1 \leq E_2$. Dann gilt $E_1 = \inf\{E_1, E_2\}$ und wir erhalten $\mathcal{R}_1^{\mathcal{S}}(E_1) = \mathcal{R}_1^{\mathcal{S}}(\inf\{E_1, E_2\}) = \inf\{\mathcal{R}_1^{\mathcal{S}}(E_1), \mathcal{R}_1^{\mathcal{S}}(E_2)$
Daraus folgt $\mathcal{R}_1^{\mathcal{S}}(E_1) \leq \mathcal{R}_1^{\mathcal{S}}(E_2)$. Jeder Observablen $\{E_\lambda | \lambda \in \mathbb{R}$
von $\mathcal{S}$ können wir dann nach 5.15 einen Operator $\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, d\mathcal{R}_1^{\mathcal{S}}(E_\lambda)$ im Hilbertraum $\mathcal{H}_1^{\mathcal{S}}$ zuordnen. Im Falle der kanonischen Observablen erhalten wir die Orts- und Impulsoperatoren.

2.4 Definition : Es heisse $Q^{\sigma}_{\lambda,\nu} = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, dR^{\sigma}_{\lambda}(E^{\nu}_{\lambda})$ der Operator der ν -ten Orts- und $P^{\sigma}_{\lambda,\nu} = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, dR^{\sigma}_{\lambda}(F^{\nu}_{\lambda})$ der Operator der ν -ten Impulskoordinate von $\mathcal{M}^{\sigma}_{\lambda}$ $(\nu = 1,2,\ldots,f^{\sigma})$.

2.5 Definition : $H^{\sigma}_{\lambda}(t)$ heisse der Hamiltonoperator von $\mathcal{M}^{\sigma}_{\lambda}$ für $t \in \mathbb{R}$. Wenn er von t unabhängig ist, so werde er mit H^{σ}_{λ} bezeichnet und "der Hamiltonoperator von $\mathcal{M}^{\sigma}_{\lambda}$ " genannt.

Die Differentialgleichung $-\frac{\hbar}{i}\dot{\phi}(t) = H^{\sigma}_{\lambda}(t)\,\phi(t)$ heisse die Schrödingergleichung von $\mathcal{M}^{\sigma}_{\lambda}$.

Eine grosse Bedeutung haben die Vertauschungsrelationen, denen die Operatoren der Orts- und Impulskoordinaten genügen. Aufgrund von 2.1, 2.c , können wir anstelle dieser Operatoren die Multiplikations- bzw. Differentiationsoperatoren $x_{\lambda\bullet}, \ldots, x_{f^{\sigma}\bullet}, \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_{\lambda}}, \ldots, \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_{f^{\sigma}}}$ im Hilbertraum $L^2(\mathbb{R}_{f^{\sigma}})$ betrachten. Aus der Form dieser Operatoren folgt unmittelbar, dass jede der Beziehungen [1] $\left(\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_{\mu}}\right)(x_{\nu}\bullet) - (x_{\nu}\bullet)\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_{\mu}}\right)\right)f = \frac{\hbar}{i}\delta_{\mu\nu} f$, $\left(\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_{\mu}}\right)\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_{\nu}}\right) - \left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_{\nu}}\right)\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_{\mu}}\right)\right)f = 0$, $\left((x_{\mu}\bullet)(x_{\nu}\bullet) - (x_{\nu}\bullet)(x_{\mu}\bullet)\right)f = 0$ $(\mu,\nu = 1,2,\ldots,f^{\sigma})$ dann gilt, wenn $f \in L^2(\mathbb{R}_{f^{\sigma}})$ im Definitionsbereich des links stehenden Operators liegt. Die Definitionsbereiche dieser Operatoren liegen offensichtlich dicht in $L^2(\mathbb{R}_{f^{\sigma}})$, sind jedoch echte Teilmengen. Damit erhält man folgenden

2.6 Satz : Es gelten für $\mu,\nu = 1,2,\ldots,f^{\sigma}$ die Relationen [1]
$P^{\sigma}_{\lambda,\mu} Q^{\sigma}_{\lambda,\nu} - Q^{\sigma}_{\lambda,\nu} P^{\sigma}_{\lambda,\mu} \subset \frac{\hbar}{i}\delta_{\mu\nu} I_{\mathcal{H}^{\sigma}_{\lambda}}$, $P^{\sigma}_{\lambda,\mu} P^{\sigma}_{\lambda,\nu} - P^{\sigma}_{\lambda,\nu} P^{\sigma}_{\lambda,\mu} \subset \mathcal{O}$ und $Q^{\sigma}_{\lambda,\mu} Q^{\sigma}_{\lambda,\nu} - Q^{\sigma}_{\lambda,\nu} Q^{\sigma}_{\lambda,\mu} \subset \mathcal{O}$. Die Definitionsbereiche der links stehenden Operatoren liegen dicht in $\mathcal{H}^{\sigma}_{\lambda}$.

---

1) Es ist $\delta_{\mu\nu} = \begin{cases} 1 \text{ für } \mu = \nu \\ 0 \text{ für } \mu \neq \nu \end{cases}$. Das Zeichen "$\subset$" bedeutet, dass die rechte Seite eine echte Erweiterung der linken ist.

An dieser Stelle wollen wir den Fourier-Plancherel-Operator erwähnen [1, S.79, S.118 ; 4, S94] . Das ist eine Isometrie von $L^2(\mathbb{R}_{f\sigma})$ auf sich, die den Differentiationsoperator $\frac{\pm\partial}{i\partial x_\nu}$ $(\nu = 1,2,\dots,f^\sigma)$ in den Multiplikationsoperator $x_\nu \cdot$ überführt.

2.7 Satz : Für $m = 1,2,\dots$, alle $f \in L^2(\mathbb{R}_{f\sigma})$ und alle $(y_1, y_2, \dots, y_{f\sigma}) \in \mathbb{R}_{f\sigma}$ werde gesetzt :

$$W_m = \{ (x_1, \dots, x_{f\sigma}) \in \mathbb{R}_{f\sigma} \mid -m \le x_\nu \le m,\ \nu = 1,2,\dots,f^\sigma \},$$

$$(T_m f)(y_1, \dots, y_{f\sigma}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\right)^{f^\sigma} \int_{W_m} f(x_1, \dots, x_{f\sigma}) e^{-\frac{i}{\hbar}(x_1 y_1 + \dots + x_{f\sigma} y_{f\sigma})} dx_1 \cdots dx_{f\sigma}.$$

Dann ist $T_m f \in L^2(\mathbb{R}_{f\sigma})$ für $m = 1,2,\dots$ und alle $f \in L^2(\mathbb{R}_{f\sigma})$, die Folge $\{T_m f\}$ konvergiert für alle $f \in L^2(\mathbb{R}_{f\sigma})$ im Sinne der Norm von $L^2(\mathbb{R}_{f\sigma})$ und die Abbildung $T : f \to \lim_{m\to\infty} T_m f$ ist eine Isometrie von $L^2(\mathbb{R}_{f\sigma})$ auf sich so, dass $T\left(\frac{\pm\partial}{i\partial x_\nu}\right) T^{-1} = x_\nu$ $(\nu = 1,2,\dots,f^\sigma)$ gilt. Man erhält T^{-1} aus T, indem man $e^{+\frac{i}{\hbar}(x_1 y_1 + \dots + x_{f\sigma} y_{f\sigma})}$ anstelle von $e^{-\frac{i}{\hbar}(x_1 y_1 + \dots + x_{f\sigma} y_{f\sigma})}$ einsetzt. Die Isometrie T heisse der Fourier-Plancherel-Operator in $L^2(\mathbb{R}_{f\sigma})$.

Im Modell $\mathcal{U}_1^\sigma$ sind die Wahrscheinlichkeitsaussagen in den Zuständen definiert. Wir wollen nun annehmen, es sei nicht genau bekannt, in welchem Zustand von σ gemessen wird ; es mögen etwa die Zustände $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m$ mit den Wahrscheinlichkeiten $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ in Frage kommen $\left(\sum_{\nu=1}^{m} \alpha_\nu = 1\right)$. Dann ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zur Zeit $t \in \mathbb{R}$ eine Messung von $E \in \sigma$ das Ergebnis 1 liefert, gleich $\alpha_1 (R_1^\sigma(E)\phi_1(t), \phi_1(t)) + \dots + \alpha_m (R_1^\sigma(E)\phi_m(t), \phi_m(t))$ zu setzen.

2.8 Definition : Gegeben seien Zustände $\phi_1, \ldots, \phi_m$ von $\mathfrak{S}$ im Modell $\mathcal{M}_1^{\mathfrak{S}}$ und positive Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ so, dass $\sum_{\nu=1}^{m} \alpha_\nu = 1$ gilt. Es bezeichne ω_{ϕ_ν} für $\nu = 1, 2, \ldots, m$ die auf $(\mathfrak{S}, \mathbb{R})$ definierte reellwertige Funktion $(E, t) \longrightarrow (R_1^{\mathfrak{S}}(E)\phi_\nu(t), \phi_\nu(t))$. Dann heisse die Funktion $\sum_{\nu=1}^{m} \alpha_\nu \omega_{\phi_\nu}$ ein <u>statistisches Gemisch</u> von $\mathfrak{S}$ im Modell $\mathcal{M}_1^{\mathfrak{S}}$.

Der Begriff "Kommensurabilität", der nun definiert wird, spielt vor allem in § 14 eine wichtige Rolle.

2.9 Definition : Die Eigenschaften $E_1, E_2 \in \mathfrak{S}$ heissen <u>kommensurabel</u> (gemeinsam messbar) in $\mathcal{M}_1^{\mathfrak{S}}$, wenn $R_1^{\mathfrak{S}}(E_1)$ mit $R_1^{\mathfrak{S}}(E_2)$ vertauschbar ist.

Diese Definition kann nach [4, S. 60] anschaulich interpretiert werden : $R_1^{\mathfrak{S}}(E_1)$ und $R_1^{\mathfrak{S}}(E_2)$ sind vertauschbar genau dann, wenn $I_{\mathcal{H}_1^{\mathfrak{S}}} = R_1^{\mathfrak{S}}(\text{„}E_1 \text{ und } E_2\text{“}) + R_1^{\mathfrak{S}}(\text{„}E_1 \text{ und } \bar{E}_2\text{“}) + R_1^{\mathfrak{S}}(\text{„}\bar{E}_1 \text{ und } E_2\text{“}) + R_1^{\mathfrak{S}}(\text{„}\bar{E}_1 \text{ und } \bar{E}_2\text{“})$ gilt. Eine der in Klammern stehenden Eigenschaften kann also mit Sicherheit durch Messung festgestellt werden. Dann ist jedoch sowohl über das Vorliegen von E_1 als auch über das von E_2 entschieden. Im allgemeinen ist es nicht möglich, zwei Eigenschaften $E_1, E_2 \in \mathfrak{S}$ gemeinsam zu messen : Es kann vorkommen, dass keine der Eigenschaften „E_1 und E_2“, ..., „$\bar{E}_1$ und $\bar{E}_2$“ vorliegt.

Einer Observablen $\{E_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ von $\mathfrak{S}$, also einer geordneten Schar von Eigenschaften von $\mathfrak{S}$ (1.3), ist durch $R_1^{\mathfrak{S}}$ eine geordnete Schar $\{R_1^{\mathfrak{S}}(E_\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ von Projektionsoperatoren zugeordnet. Es gilt $R_1^{\mathfrak{S}}(E_{\lambda'}) \leq R_1^{\mathfrak{S}}(E_{\lambda''})$ für $\lambda' \leq \lambda''$. Daher sind $E_{\lambda'}$ und $E_{\lambda''}$ für beliebige $\lambda', \lambda'' \in \mathbb{R}$ kommensurabel. Eine gemeinsame Messung sämtlicher Eigenschaften der Observablen soll (unabhängig davon, ob sie praktisch realisierbar ist) als Messung der Observablen bezeichnet

werden. Jeder solchen Messung ist dann eindeutig eine reelle Zahl als Messwert zugeordnet. In der Praxis wird eine solche Ideal-Messung im allgemeinen nur näherungsweise durchgeführt werden können, so dass man für den Messwert nur einen Näherungswert erhält.

2.10 Definition : Sei $\{E_\lambda | \lambda \in \mathbb{R}\}$ eine Observable von $\mathfrak{O}$. Eine gemeinsame Messung sämtlicher Eigenschaften E_λ heisse eine Messung der Observablen $\{E_\lambda | \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Einer Messung M der Observablen $\{E_\lambda | \lambda \in \mathbb{R}\}$ sei folgendermassen eine reelle Zahl λ_M zugeordnet : Für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ gelte $\lambda_M \leq \lambda$ genau dann, wenn bei der Messung M die Eigenschaft E_λ bestätigt wird. Dadurch ist λ_M eindeutig bestimmt.

2.11 Definition : Sei M eine Messung der Observablen $\{E_\lambda | \lambda \in \mathbb{R}\}$. Die Zahl $\lambda_M \in \mathbb{R}$ heisse der Messwert von M .

Die Eigenschaften einer Observablen $\{E_\lambda | \lambda \in \mathbb{R}\}$ von $\mathfrak{O}$ können folgendermassen interpretiert werden : Für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ ist E_λ die Eigenschaft, dass der bei einer Messung M erhaltene Messwert $\lambda_M \leq \lambda$ ist. Nach $\mathfrak{D}_1^{\mathfrak{O}}$ ist $(\mathcal{R}_1^{\mathfrak{O}}(E_\lambda)\phi(t), \phi(t))$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dieser Fall bei einer Messung im Zustand ϕ zur Zeit t eintritt. Mit Hilfe dieser Wahrscheinlichkeiten können dann der Erwartungswert und die Streuung definiert werden.

2.12 Definition : Sei $\{E_\lambda | \lambda \in \mathbb{R}\}$ eine Observable von $\mathfrak{O}$ und $L = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, d\mathcal{R}_1^{\mathfrak{O}}(E_\lambda)$ der zugehörige Operator im Hilbertraum $\mathcal{H}_1^{\mathfrak{O}}$. Sei ϕ ein Zustand von $\mathfrak{O}$ so, dass $\phi(t)$ für $t \in \mathbb{R}$ im Definitionsbereich von L und L^2 liegt.

Dann heisse $\mu_{\phi,t}(L) = (L\phi(t), \phi(t))$ der Erwartungswert und $s_{\phi,t}(L) = ((L - \mu_{\phi,t}(L))^2 \phi(t), \phi(t))$ die Streuung von $\{E_\lambda | \lambda \in \mathbb{R}\}$ (oder von L) im Zustand ϕ und zur Zeit t .

Die bekannten Heisenbergschen Unschärferelationen sind eine Folge der Vertauschbarkeitsbeziehungen 2.6 für die Orts- und Impulsoperatoren.

.13 Satz : Sei $t \in \mathbb{R}$ und ϕ ein Zustand von $\mathfrak{A}$ so, dass $\phi(t)$ im Definitionsbereich der Operatoren $(P_{\nu}^{\mathfrak{A}})^2$, $(Q_{\nu}^{\mathfrak{A}})^2$ und $P_{\nu}^{\mathfrak{A}} Q_{\nu}^{\mathfrak{A}} - Q_{\nu}^{\mathfrak{A}} P_{\nu}^{\mathfrak{A}}$ für $\nu = 1, 2, \ldots, f^{\mathfrak{A}}$ liegt. Dann gelten folgende Ungleichungen (Heisenbergsche Unschärferelationen) :

$$\sqrt{s_{\phi,t}(Q_{\nu}^{\mathfrak{A}})} \cdot \sqrt{s_{\phi,t}(P_{\nu}^{\mathfrak{A}})} \geq \frac{\hbar}{2} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, f^{\mathfrak{A}})$$

Zum Beweis setze man $\tilde{P}_{\nu}^{\mathfrak{A}} = P_{\nu}^{\mathfrak{A}} - \mu_{\phi,t}(P_{\nu}^{\mathfrak{A}}) I_{\mathcal{H}^{\mathfrak{A}}}$ und $\tilde{Q}_{\nu}^{\mathfrak{A}} = Q_{\nu}^{\mathfrak{A}} - \mu_{\phi,t}(Q_{\nu}^{\mathfrak{A}}) I_{\mathcal{H}^{\mathfrak{A}}}$. Dann erhält man unter den Voraussetzungen des Satzes folgende Abschätzungen : $\sqrt{s_{\phi,t}(Q_{\nu}^{\mathfrak{A}})}\ \sqrt{s_{\phi,t}(P_{\nu}^{\mathfrak{A}})} =$

$\sqrt{((\tilde{Q}_{\nu}^{\mathfrak{A}})^2 \phi(t), \phi(t))((\tilde{P}_{\nu}^{\mathfrak{A}})^2 \phi(t), \phi(t))} = \sqrt{(\tilde{Q}_{\nu}^{\mathfrak{A}} \phi(t), \tilde{Q}_{\nu}^{\mathfrak{A}} \phi(t))(\tilde{P}_{\nu}^{\mathfrak{A}} \phi(t), \tilde{P}_{\nu}^{\mathfrak{A}} \phi(t))}$

$= \| \tilde{Q}_{\nu}^{\mathfrak{A}} \phi(t) \| \, \| \tilde{P}_{\nu}^{\mathfrak{A}} \phi(t) \| \geq |(\tilde{Q}_{\nu}^{\mathfrak{A}} \phi(t), \tilde{P}_{\nu}^{\mathfrak{A}} \phi(t))| \geq \frac{1}{2} |(\tilde{P}_{\nu}^{\mathfrak{A}} \phi(t), \tilde{Q}_{\nu}^{\mathfrak{A}} \phi(t)) -$

$(\tilde{Q}_{\nu}^{\mathfrak{A}} \phi(t), \tilde{P}_{\nu}^{\mathfrak{A}} \phi(t))| = \frac{1}{2} |(\phi(t), (\tilde{P}_{\nu}^{\mathfrak{A}} \tilde{Q}_{\nu}^{\mathfrak{A}} - \tilde{Q}_{\nu}^{\mathfrak{A}} \tilde{P}_{\nu}^{\mathfrak{A}}) \phi(t))| = \frac{\hbar}{2} |(\phi(t), \phi(t))| = \frac{\hbar}{2}$.

§ 3. Modelle der klassischen Mechanik

Wir definieren die Modelle der klassischen Mechanik so, dass die Strukturähnlichkeit zu den üblichen Modellen der Quantenmechanik sichtbar wird ; sie entspricht der Forderung des Korrespondenzprinzips.

Es bezeichne $\mathfrak{L}_m$ die Gesamtheit aller Lebesgue-messbaren Funktionen, die auf dem $\mathbb{R}_m$ definiert sind und nur die Werte 0 und 1 annehmen. $I_{\mathbb{R}_m}$ bezeichne die Einsfunktion, die jedem $(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}_m$ den Wert 1 zuordnet.

Sei $L_1, L_2 \in \mathfrak{L}_m$. Es werde $L_1 \leq L_2$ gesetzt, wenn $L_1(x_1,\dots,x_m) \leq L_2(x_1,\dots,x_m)$ für jedes $(x_1,\dots,x_m) \in \mathbb{R}_m$ gilt. Durch diese Relation wird $\mathfrak{L}_m$ zu einer teilweise geordneten Menge. Die Funktion $\sup\{L_1, L_2\} : (x_1,\dots,x_m) \to \max\{L_1(x_1,\dots,x_m), L_2(x_1,\dots,x_m)\}$ bzw. $\inf\{L_1, L_2\} : (x_1,\dots,x_m) \to \min\{L_1(x_1,\dots,x_m), L_2(x_1,\dots,x_m)\}$ ist die kleinste obere bzw. grösste untere Schranke von $\{L_1, L_2\} \subseteq \mathfrak{L}_m$. Da beide Schranken in $\mathfrak{L}_m$ stets existieren, ist $\mathfrak{L}_m$ bezüglich $\leq$ ein Verband.

Sei $L \in \mathfrak{L}_m$. Dann gilt : $I_{\mathbb{R}_m} - L \in \mathfrak{L}_m$

3.1 Definition : Sei $\mathfrak{S}$ ein physikalisches System mit den kanonischen Observablen $\{E_\lambda^\nu \mid \lambda \in \mathbb{R}\}, \{F_\lambda^\nu \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ $(\nu = 1, 2, \dots, f^{\mathfrak{S}})$.

Es sei :

1. $\mathbb{R}_{2f^{\mathfrak{S}}}$ der $2f^{\mathfrak{S}}$-dimensionale "Phasenraum",
2. $\mathcal{R}_o^{\mathfrak{S}}$ eine Abbildung von $\mathfrak{S}$ auf die Menge $\mathfrak{L}_{2f^{\mathfrak{S}}}$ der Lebesguemessbaren auf $\mathbb{R}_{2f^{\mathfrak{S}}}$ definierten Funktionen, die nur die Werte 0 und 1 annehmen, so dass gilt :
   a) $\mathcal{R}_o^{\mathfrak{S}}(\bar{E}) = I_{\mathbb{R}_{2f^{\mathfrak{S}}}} - \mathcal{R}_o^{\mathfrak{S}}(E)$ für alle $E \in \mathfrak{S}$.
   b) $\mathcal{R}_o^{\mathfrak{S}}(\sup\{E_1, E_2\}) = \sup\{\mathcal{R}_o^{\mathfrak{S}}(E_1), \mathcal{R}_o^{\mathfrak{S}}(E_2)\}$ für alle $E_1, E_2 \in \mathfrak{S}$.
   c) Es sei $(\mathcal{R}_o^{\mathfrak{S}}(E_\lambda^\nu))(q_1,\dots,q_{f^{\mathfrak{S}}}, p_1,\dots,p_{f^{\mathfrak{S}}}) = \begin{cases} 1 & \text{für } q_\nu \leq \lambda \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
   und $(\mathcal{R}_o^{\mathfrak{S}}(F_\lambda^\nu))(q_1,\dots,q_{f^{\mathfrak{S}}}, p_1,\dots,p_{f^{\mathfrak{S}}}) = \begin{cases} 1 & \text{für } p_\nu \leq \lambda \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
   für $\nu = 1, 2, \dots, f^{\mathfrak{S}}$, alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und alle $(q_1,\dots,q_{f^{\mathfrak{S}}}, p_1,\dots,p_{f^{\mathfrak{S}}}) \in \mathbb{R}_{2f^{\mathfrak{S}}}$
3. $\{H_o^{\mathfrak{S}}(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ eine Schar von reellwertigen Funktionen auf dem $\mathbb{R}_{2f^{\mathfrak{S}}}$,

4. $\mathfrak{D}_o^{\mathfrak{S}}$ die folgende Festsetzung : "Jede Abbildung $\mathcal{P} : t \longrightarrow \mathcal{P}(t) = (q_1(t), \ldots, q_{f^{\mathfrak{S}}}(t), p_1(t), \ldots, p_{f^{\mathfrak{S}}}(t))$ von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}_{2f^{\mathfrak{S}}}$ so, dass $\dot{q}_\nu(t) = \left(\frac{\partial H_o^{\mathfrak{S}}(t)}{\partial p_\nu}\right)(q_1(t), \ldots, p_1(t), \ldots)$ und $\dot{p}_\nu(t) = -\left(\frac{\partial H_o^{\mathfrak{S}}(t)}{\partial q_\nu}\right)(q_1(t), \ldots, p_1(t), \ldots)$ für $\nu = 1, 2, \ldots, f^{\mathfrak{S}}$ und alle $t \in \mathbb{R}$ gilt, heisse ein Zustand von $\mathfrak{S}$ im Modell $\mathcal{M}_o^{\mathfrak{S}}$. Für alle $E \in \mathfrak{S}$ sei $w_{\mathcal{P},t}(E) = (\mathcal{R}_o^{\mathfrak{S}}(E))(\mathcal{P}(t))$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Messung von E im Zustand $\mathcal{P}$ und zur Zeit t das Ergebnis 1 liefert."

Dann heisse das Quadrupel $\mathcal{M}_o^{\mathfrak{S}} = (\mathbb{R}_{2f^{\mathfrak{S}}}, \mathcal{R}_o^{\mathfrak{S}}, \{H_o^{\mathfrak{S}}(t) \mid t \in \mathbb{R}\}, \mathfrak{D}_o^{\mathfrak{S}})$ ein zu $\mathfrak{S}$ gehöriges Modell der klassischen Mechanik.

Analog zu 2.3 gilt der folgende

3.2 Satz : $\mathcal{R}_o^{\mathfrak{S}}$ ist ein Verbandshomomorphismus von $\mathfrak{S}$ auf $\mathfrak{L}_{2f^{\mathfrak{S}}}$.

Jeder Observablen $\{E_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ von $\mathfrak{S}$ kann ein Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, d\mathcal{R}_o^{\mathfrak{S}}(E_\lambda)$ zugeordnet werden. (Die Definition erfolgt analog zu 5.15.) Es ist $\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, d\mathcal{R}_o^{\mathfrak{S}}(E_\lambda)$ eine auf $\mathbb{R}_{2f^{\mathfrak{S}}}$ definierte reellwertige Funktion. Für die kanonischen Observablen $\{E_\lambda^\nu \mid \lambda \in \mathbb{R}\}, \{F_\lambda^\nu \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, f^{\mathfrak{S}})$ erhält man aufgrund von 3.1, 2.c, die Funktionen $\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, d\mathcal{R}_o^{\mathfrak{S}}(E_\lambda^\nu) : (q_1, \ldots, q_{f^{\mathfrak{S}}}, p_1, \ldots, p_{f^{\mathfrak{S}}}) \longrightarrow q_\nu$ und $\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, d\mathcal{R}_o^{\mathfrak{S}}(F_\lambda^\nu) : (q_1, \ldots, q_{f^{\mathfrak{S}}}, p_1, \ldots, p_{f^{\mathfrak{S}}}) \longrightarrow p_\nu$.

Die folgenden Definitionen stehen in Analogie zu 2.4 und 2.5 .

3.3 Definition : Es heisse $Q_{o,\nu}^{\mathfrak{S}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, d\mathcal{R}_o^{\mathfrak{S}}(E_\lambda^\nu)$ die Funktion der ν-ten Orts- und $P_{o,\nu}^{\mathfrak{S}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, d\mathcal{R}_o^{\mathfrak{S}}(F_\lambda^\nu)$ die Funktion der ν-ten Impulskoordinate von $\mathcal{M}_o^{\mathfrak{S}}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, f^{\mathfrak{S}})$.

3.4 **Definition :** $H_0^{\mathfrak{S}}(t)$ heisse die Hamiltonfunktion von $\mathcal{M}_0^{\mathfrak{S}}$ für $t \in \mathbb{R}$. Wenn sie von t unabhängig ist, so werde sie mit $H_0^{\mathfrak{S}}$ bezeichnet und die "Hamiltonfunktion von $\mathcal{M}_0^{\mathfrak{S}}$ " genannt. Das Differentialgleichungssystem $\dot{q}_\nu = \frac{\partial H_0^{\mathfrak{S}}(t)}{\partial p_\nu}$, $\dot{p}_\nu = -\frac{\partial H_0^{\mathfrak{S}}(t)}{\partial q_\nu}$ $(\nu = 1, 2, \dots, f^{\mathfrak{S}})$ heisse das Hamiltonsche Gleichungssystem von $\mathcal{M}_0^{\mathfrak{S}}$.

Sei $\mathcal{M}_1^{\mathfrak{S}} = (\mathcal{H}_1^{\mathfrak{S}}, \mathcal{R}_1^{\mathfrak{S}}, \{H_1^{\mathfrak{S}}(t) \mid t \in \mathbb{R}\}, \mathcal{D}_1^{\mathfrak{S}})$ ein zu $\mathfrak{S}$ gehöriges übliches Modell der Quantenmechanik. Die Strukturähnlichkeit der Modelle $\mathcal{M}_0^{\mathfrak{S}}$ und $\mathcal{M}_1^{\mathfrak{S}}$ tritt noch deutlicher hervor, wenn wir annehmen, dass $\mathcal{H}_1^{\mathfrak{S}} = L^2(\mathbb{R}_{f^{\mathfrak{S}}})$ gilt ; wegen 2.1, 2.c, bedeutet das keine Einschränkung der Allgemeinheit. Den entscheidenden Unterschied zwischen beiden Modellen erkennt man an ihren Wahrscheinlichkeitsaussagen. Für jeden Zustand $\mathcal{P}$ in $\mathcal{M}_0^{\mathfrak{S}}$, jeden Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$ und jede Eigenschaft $E \in \mathfrak{S}$ ist $w_{\mathcal{P},t}(E)$ entweder = 0 oder = 1. Das bedeutet, dass in jedem Zustand zu jedem Zeitpunkt sämtliche Messergebnisse mit Sicherheit vorhergesagt werden können. Dagegen kann $w_{\phi,t}(E) = (R_1^{\mathfrak{S}}(E)\,\phi(t), \phi(t))$ jeden beliebigen Wert zwischen 0 und 1 annehmen. In den Zuständen von $\mathfrak{S}$ im Modell $\mathcal{M}_1^{\mathfrak{S}}$ ist daher im allgemeinen keine sichere Vorhersage der Messergebnisse möglich.

Uns interessieren vor allem diejenigen Modelle der klassischen Mechanik, die physikalischen Systemen mit Zeitmessung (1.5) zugeordnet sind.

Sei $\mathfrak{S}$ ein physikalisches System. $\mathfrak{T} \supseteq \mathfrak{S}$ sei ein physikalisches System mit Zeitmessung so, dass die kanonischen Observablen $\{E_\lambda^\nu \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$, $\{F_\lambda^\nu \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ $(\nu = 1, 2, \dots, f^{\mathfrak{T}})$ von $\mathfrak{T}$ für $\nu = 1, 2, \dots, f^{\mathfrak{T}} - 1$ mit denen von $\mathfrak{S}$ übereinstimmen $(f^{\mathfrak{S}} = f^{\mathfrak{T}} - 1)$. Wir wollen annehmen, dass man jedes gegebene physikalische System $\mathfrak{S}$ auf diese Weise in ein System $\mathfrak{T}$ mit Zeitmessung einbetten kann.

Es seien $\mathcal{M}_o^{\sigma}$ und $\mathcal{M}_o^{\tilde{\sigma}}$ zu σ bzw. $\tilde{\sigma}$ gehörige Modelle der klassischen Mechanik. $H_o^{\sigma}(t)$ sei der Hamiltonoperator von $\mathcal{M}_o^{\sigma}$ für $t \in \mathbb{R}$. Den Hamiltonoperator von $\mathcal{M}_o^{\tilde{\sigma}}$ wählen wir folgendermassen (nach [3, S.151]): $H_o^{\tilde{\sigma}} : (q_{s1}, \dots, q_{fs}, p_{s1}, \dots, p_{fs}) \longrightarrow$

$H_o^{\tilde{\sigma}}(q_{s1}, \dots, q_{fs}, p_{s1}, \dots, p_{fs}) = (H_o^{\sigma}(q_{fs}))(q_{s1}, \dots, q_{fs-1}, p_{s1}, \dots, p_{fs-1}) + p_{fs}$.

Sei $\tau : t \longrightarrow (q_{s1}(t), \dots, q_{fs\sigma}(t), p_{s1}(t), \dots, p_{fs\sigma}(t))$ ein Zustand von σ im Modell $\mathcal{M}_o^{\sigma}$. Eine einfache Rechnung zeigt, dass dann $\tilde{\tau} : t \to (q_{s1}(t), \dots, q_{fs\sigma}(t), t, p_{s1}(t), \dots, p_{fs\sigma}(t), -(H_o^{\sigma}(t))(q_{s1}(t), \dots, q_{fs\sigma}(t), p_{s1}(t), \dots, p_{fs\sigma}(t)))$ ein Zustand von $\tilde{\sigma}$ im Modell $\mathcal{M}_o^{\tilde{\sigma}}$ ist. In beiden Zuständen liefert eine Orts- und Impulsmessung zu jedem Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$ die gleichen Werte, nämlich $q_{s1}(t), \dots, q_{fs\sigma}(t), p_{s1}(t), \dots, p_{fs\sigma}(t)$. Mit $\mathcal{M}_o^{\sigma}$ wird daher auch $\mathcal{M}_o^{\tilde{\sigma}}$ ein physikalisch sinnvolles Modell sein.

Im Zustand $\tilde{\tau}$ ist der Meßwert der Energie zur Zeit t gleich $-p_{fs}(t) = (H_o^{\sigma}(t))(q_{s1}(t), \dots, q_{fs\sigma}(t), p_{s1}(t), \dots, p_{fs\sigma}(t))$. Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt $H_o^{\tilde{\sigma}}(\tilde{\tau}(t)) = \sigma$; die Energie ist durch Zeit, Ort und Impuls eindeutig bestimmt. Wir können annehmen, dass nur solche Zustände sinnvoll sind, für die diese Beziehung gilt.

Zusammenfassend formulieren wir folgende

.5 Annahmen:

a) Wenn für das System σ ein physikalisch sinnvolles Modell $\mathcal{M}_o^{\sigma}$ der klassischen Mechanik existiert, so existiert für das System $\tilde{\sigma} \supseteq \sigma$ mit Zeitmessung ebenfalls ein sinnvolles Modell $\mathcal{M}_o^{\tilde{\sigma}}$.

b) Wenn dabei $H_o^{\sigma}(t)$ die Hamiltonfunktion von $\mathcal{M}_o^{\sigma}$ für $t \in \mathbb{R}$ ist, so können wir die Hamiltonfunktion von $\mathcal{M}_o^{\tilde{\sigma}}$ folgendermaßen (zeitunabhängig) wählen: $H_o^{\tilde{\sigma}} : (q_{s1}, \dots, q_{fs}, p_{s1}, \dots, p_{fs}) \longrightarrow$ $H_o^{\tilde{\sigma}}(q_{s1}, \dots, q_{fs}, p_{s1}, \dots, p_{fs}) = (H_o^{\sigma}(q_{fs}))(q_{s1}, \dots, q_{fs-1}, p_{s1}, \dots, p_{fs-1}) + p_{fs}$.

c) Im allgemeinen ist ein Zustand $t \to (q_{s1}(t), \dots, q_{fs}(t), p_{s1}(t), \dots, p_{fs}(t))$

von $\mathcal{T}$ im Modell $\mathcal{M}_0^{\mathcal{T}}$ nur dann sinnvoll, wenn $H_0^{\mathcal{T}}(q_1(t), \ldots, q_{f^{\mathcal{T}}}(t), p_1(t), \ldots, p_{f^{\mathcal{T}}}(t)) = \mathcal{T}$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt.

§ 4. Die Konstruktion üblicher Modelle nach dem Korrespondenzprinzip

Sei $\mathcal{M}_0^{\mathcal{T}} = (\mathbb{R}_{2f^{\mathcal{T}}}, \mathcal{R}_0^{\mathcal{T}}, \{H_0^{\mathcal{T}}(t) \mid t \in \mathbb{R}\}, \mathcal{D}_0^{\mathcal{T}})$ ein zum physikalischen System $\mathcal{T}$ gehöriges Modell der klassischen Mechanik. Die kanonischen Observablen von $\mathcal{T}$ seien: $\{E_\lambda^\nu \mid \lambda \in \mathbb{R}\}, \{F_\lambda^\nu \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, f^{\mathcal{T}})$. Wir wollen versuchen, dem Modell $\mathcal{M}_0^{\mathcal{T}}$ ein "in Korrespondenz" stehendes übliches Modell $\mathcal{M}_1^{\mathcal{T}} = (\mathcal{H}_1^{\mathcal{T}}, \mathcal{R}_1^{\mathcal{T}}, \{H_1^{\mathcal{T}}(t) \mid t \in \mathbb{R}\}, \mathcal{D}_1^{\mathcal{T}})$ der Quantenmechanik zuzuordnen.

Zunächst setzen wir $\mathcal{H}_1^{\mathcal{T}} = L^2(\mathbb{R}_{f^{\mathcal{T}}})$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, d\mathcal{R}_1^{\mathcal{T}}(E_\lambda^\nu) = x_\nu \cdot$ und $\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, d\mathcal{R}_1^{\mathcal{T}}(F_\lambda^\nu) = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_\nu}$ für $\nu = 1, 2, \ldots, f^{\mathcal{T}}$. Durch diese Definition sind die Operatoren $\mathcal{R}_1^{\mathcal{T}}(E_\lambda^\nu), \mathcal{R}_1^{\mathcal{T}}(F_\lambda^\nu)$ für $\nu = 1, 2, \ldots, f^{\mathcal{T}}$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ bestimmt.

Für die weitere Konstruktion der Abbildung $\mathcal{R}_1^{\mathcal{T}} \in \mathcal{M}_1^{\mathcal{T}}$ sowie für die Konstruktion des Hamiltonoperators $H_1^{\mathcal{T}}(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ benötigen wir ein Verfahren, das einer auf $\mathbb{R}_{2f^{\mathcal{T}}}$ definierten komplexwertigen Funktion $G : (q_1, \ldots, q_{f^{\mathcal{T}}}, p_1, \ldots, p_{f^{\mathcal{T}}}) \to G(q_1, \ldots, q_{f^{\mathcal{T}}}, p_1, \ldots, p_{f^{\mathcal{T}}})$ einen "in Korrespondenz" stehenden Operator $Op(G)$ in $L^2(\mathbb{R}_{f^{\mathcal{T}}})$ zuordnet: Man setze formal die Operatoren $x_1 \cdot, \ldots, x_{f^{\mathcal{T}}} \cdot, \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_{f^{\mathcal{T}}}}$ an die Stelle von $q_1, \ldots, q_{f^{\mathcal{T}}}, p_1, \ldots, p_{f^{\mathcal{T}}}$ und versuche, dem gewonnenen Ausdruck $G(x_1 \cdot, \ldots, x_{f^{\mathcal{T}}} \cdot, \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_{f^{\mathcal{T}}}})$ einen Sinn als Operator in $L^2(\mathbb{R}_{f^{\mathcal{T}}})$ zu geben. Das kann z.B. mit Hilfe von Reihenentwicklungen der Funktion G geschehen. Wenn möglich, versuche man, dabei einen hermiteschen Operator zu erhalten (z.B. durch Erweiterung). Wir setzen dann: $Op(G) = G(x_1 \cdot, \ldots, x_{f^{\mathcal{T}}} \cdot, \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_{f^{\mathcal{T}}}})$.

Die Korrespondenz $G \longleftrightarrow Op(G)$ kann man folgendermaßen verdeutlichen: Sei etwa $f^{\mathcal{T}} = 1$ und $G(q_1, p_1) = \sum_{s=1}^{\infty} \alpha_s q_1^s + \sum_{s=1}^{\infty} \beta_s p_1^s$.

Dann gilt $G = \sum_{s=1}^{\infty} \alpha_s \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, d R_0^{\sigma}(E_\lambda^1) \right)^s + \sum_{s=1}^{\infty} \beta_s \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, d R_0^{\sigma}(F_\lambda^1) \right)^s$ und man erhält den Operator $Op(G)$, indem man hierbei $R_0^{\sigma}(E_\lambda^1)$, $R_0^{\sigma}(F_\lambda^1)$ durch $R_1^{\sigma}(E_\lambda^1), R_1^{\sigma}(F_\lambda^1)$ ersetzt. Das Entsprechende gilt auch, wenn allgemeiner $G(q_{1,1}, \dots, q_{f\sigma}, p_{1,1}, \dots, p_{f\sigma})$ ein Polynom ist oder eine Reihenentwicklung besitzt.

Sei nun $\{E_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ eine beliebige Observable von σ. Wir setzen $\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, d R_1^{\sigma}(E_\lambda) = Op\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, d R_0^{\sigma}(E_\lambda) \right)$ und bestimmen, falls es möglich ist, daraus die Operatoren $R_1^{\sigma}(E_\lambda)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$.

Auf diese Weise kann man versuchen, "stückweise" die Abbildung R_1^{σ} von $\mathcal{M}_1^{\sigma}$ zu konstruieren. Häufig begnügt man sich jedoch mit den R_1^{σ} -Bildern der kanonischen Observablen. In diesem Falle braucht nur noch der Hamiltonoperator $H_1^{\sigma}(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ konstruiert zu werden.

Wir setzen $H_1^{\sigma}(t) = Op(H_0^{\sigma}(t))$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Wenn wir nach diesem Verfahren ein übliches Modell $\mathcal{M}_1^{\sigma} = \left(L^2(\mathbb{R}_{f\sigma}), R_1^{\sigma}, \{H_1^{\sigma}(t) \mid t \in \mathbb{R}\}, \mathcal{D}_1^{\sigma} \right)$ der Quantenmechanik erhalten, so wollen wir sagen, es "stehe in Korrespondenz" oder es "korrespondiere" mit dem klassischen Modell $\mathcal{M}_0^{\sigma}$.

In der Praxis hat das hier skizzierte Verfahren zur Konstruktion üblicher Modelle eine grosse Bedeutung. Sämtliche praktisch verwendeten Modelle gewinnt man auf diese Weise. Ob eines der konstruierten Modelle physikalisch sinnvoll ist, kann nur experimentell entschieden werden.

§ 5 Einige Definitionen und Sätze über symmetrische Algebren.

A. Definition der verwendeten Räume

Gegeben sei ein Vektorraum $\mathfrak{V}$ über dem Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$.

5.1 $\mathfrak{V}$ heisse eine Algebra, wenn in $\mathfrak{V}$ eine Multiplikation erklärt ist mit folgenden Eigenschaften: Für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ und alle $a, b, c \in \mathfrak{V}$ gilt $\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b)$, $(ab)c = a(bc)$, $(a+b)c = ac + bc$, $c(a+b) = ca + cb$.

5.2 $\mathfrak{V}$ heisse eine symmetrische Algebra, wenn $\mathfrak{V}$ eine Algebra ist und eine Abbildung j von $\mathfrak{V}$ auf sich erklärt ist mit den Eigenschaften: $j(\lambda a + \mu b) = \bar{\lambda} j(a) + \bar{\mu} j(b)$, $j(j(a)) = a$, $j(ab) = j(b)\, j(a)$ (für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $a, b \in \mathfrak{V}$. Es bedeuten $\bar{\lambda}$, $\bar{\mu}$ die zu λ, μ konjugiert komplexen Zahlen). Im allgemeinen wird $j(a) = a^*$ gesetzt. j heisse eine Involution in $\mathfrak{V}$.

5.3 $\mathfrak{V}$ heisse ein normierter Raum, wenn für jedes $a \in \mathfrak{V}$ eine Norm $\|a\| \in \mathbb{R}$ erklärt ist mit den Eigenschaften: $\|a\| \geq 0$, $\|a\| = 0$ genau dann, wenn $a = 0$, $\|\lambda a\| = |\lambda| \|a\|$, $\|a+b\| \leq \|a\| + \|b\|$ (für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ und alle $a, b \in \mathfrak{V}$).

5.4 $\mathfrak{V}$ heisse ein Banachraum, wenn $\mathfrak{V}$ ein vollständiger normierter Rau ist.

5.5 $\mathfrak{V}$ heisse eine normierte Algebra, wenn $\mathfrak{V}$ eine Algebra und ein normierter Raum ist und wenn folgendes gilt: $\|ab\| \leq \|a\| \|b\|$ (für alle $a, b \in \mathfrak{V}$) , $\|e\| = 1$ (falls ein Einselement e existiert).

5.6 $\mathfrak{V}$ heisse eine Banachsche Algebra, wenn $\mathfrak{V}$ eine normierte Algebra ist und bezüglich der Norm vollständig ist.

5.7 $\mathfrak{V}$ heisse eine normierte symmetrische Algebra, wenn $\mathfrak{V}$ eine symmetrische und eine normierte Algebra ist und wenn $\|a\| = \|\xi(a)\|$ für alle $a \in \mathfrak{V}$ gilt.

5.8 $\mathfrak{V}$ heisse eine Banachsche symmetrische Algebra, wenn $\mathfrak{V}$ eine normierte symmetrische Algebra und bezüglich der Norm vollständig ist.

5.9 $\mathfrak{V}$ heisse ein euklidischer Vektorraum, wenn zu je zwei Elementen $a, b \in \mathfrak{V}$ eine Zahl $(a,b) \in \mathbb{C}$ erklärt ist, so daß folgendes gilt: $(a,a) \geq 0$, $(a,a) = 0$ genau dann, wenn $a = 0$, $(a,b) = \overline{(b,a)}$, $(\lambda a, b) = \lambda (a,b)$, $(a+b,c) = (a,c) + (b,c)$ (für alle $a, b \in \mathfrak{V}$). (a,b) heisse inneres Produkt von a und b.

5.10 $\mathfrak{V}$ heisse ein Hilbertraum, wenn $\mathfrak{V}$ euklidisch und bezüglich der Norm $\|a\| = \sqrt{(a,a)}$ vollständig ist. Ein Hilbertraum heisse separabel bzw. inseparabel, wenn er eine Basis besitzt, die aus abzählbar bzw. überabzählbar unendlich vielen Vektoren besteht.

B. Operatoren

Es seien $\mathfrak{V}, \overline{\mathfrak{V}}$ Vektorräume über $\mathbb{C}$. Eine Abbildung $A : a \to Aa$ einer Menge $\mathfrak{D}_A \subseteq \mathfrak{V}$ auf eine Menge $\mathfrak{R}_A \subseteq \overline{\mathfrak{V}}$ heisse ein Operator von $\mathfrak{V}$ in $\overline{\mathfrak{V}}$. $\mathfrak{D}_A$ heisse Definitionsbereich und $\mathfrak{R}_A$ Wertebereich. Im Fall $\mathfrak{V} = \overline{\mathfrak{V}}$ heisse A ein Operator in $\mathfrak{V}$. Der Operator A heisse linear, wenn $\mathfrak{D}_A$ ein Teilraum von $\mathfrak{V}$ ist und wenn $A(\lambda a + \mu b) = \lambda Aa + \mu Ab$ für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ und alle $a, b \in \mathfrak{V}$ gilt.

Ein Operator B von $\mathfrak{V}$ in $\overline{\mathfrak{V}}$ heisse eine Erweiterung von A, wenn $\mathfrak{D}_A \subseteq \mathfrak{D}_B$ und $Aa = Ba$ für alle $a \in \mathfrak{D}_A$ gilt. In diesem Fall werde $A \subseteq B$ geschrieben.

Es seien $\mathfrak{N}, \overline{\mathfrak{N}}$ normierte Räume. Ein Operator A von $\mathfrak{N}$ in $\overline{\mathfrak{N}}$ heisse beschränkt, wenn ein β mit $0 \leq \beta \in \mathbb{R}$ existiert, so dass $\|Aa\| \leq \beta \|a\|$ für alle $a \in \mathfrak{D}_A$ gilt. Sei A ein beschränkter Operator von $\mathfrak{N}$ in $\overline{\mathfrak{N}}$.

Die positive reelle Zahl $\|A\| = \sup_{\|a\| \leq 1} \|Aa\|$ wird als Norm von A bezeichnet.

5.11 Es bezeichne $\mathfrak{L}(\mathcal{N}, \bar{\mathcal{N}})$ die Gesamtheit aller beschränkten linearen Operatoren von $\mathcal{N}$ in $\bar{\mathcal{N}}$, die auf ganz $\mathcal{N}$ definiert sind. Nach [7, S. 89] ist $\mathfrak{L}(\mathcal{N}, \bar{\mathcal{N}})$ bezüglich der Operatornorm ein normierter Raum. $\mathfrak{L}(\mathcal{N}, \bar{\mathcal{N}})$ ist ein Banachraum, wenn $\mathcal{N}$ ein Banachraum ist [7, S. 89, Satz IV]. Im Fall $\mathcal{N} = \bar{\mathcal{N}}$ wird $\mathfrak{L}(\mathcal{N}) = \mathfrak{L}(\mathcal{N}, \bar{\mathcal{N}})$ gesetzt. $\mathfrak{L}(\mathcal{N})$ ist bezüglich der Operatormultiplikation eine normierte Algebra; $\mathfrak{L}(\mathcal{N})$ ist eine Banachsche Algebra, wenn $\mathcal{N}$ ein Banachraum ist [7, S. 188, Beispiel 2]. Ein Hilbertraum $\mathcal{H}$ ist bezüglich $\|a\| = \sqrt{(a,a)}$ ein Banachraum. Daher ist $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$ eine Banachsche Algebra.

5.12 Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. A^* sei der zu $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ adjungierte Operator (d. h. es gilt $(A\varphi, \psi) = (\varphi, A^*\psi)$ für alle $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$). Dann ist $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$ mit der Involution $\xi : A \to A^*$ und der Operatornorm $\|A\|$ eine Banachsche symmetrische Algebra [7, S. 197, Beispiel 2].

5.13 Die Definition des Integrals $\int_\alpha^\beta \gamma(\lambda)\, d\mathcal{B}_\lambda$: Sei $\{\mathcal{B}_\lambda \mid \lambda \in [\alpha, \beta]\}$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ eine Schar von Projektionsoperatoren in $\mathcal{H}$, so daß $\mathcal{B}_\lambda \mathcal{B}_\mu = \mathcal{B}_\mu \mathcal{B}_\lambda = \mathcal{B}_\mu$ für alle $\lambda, \mu \in [\alpha, \beta]$ mit $\mu \leq \lambda$ gilt. Man setze $\mathcal{B}_\lambda = \mathcal{O}$ für $\lambda < \alpha$ und $\mathcal{B}_\lambda = \mathcal{I}_\mathcal{H}$ für $\lambda > \beta$. Sei γ eine komplexwertige Funktion auf dem Intervall $[\alpha, \beta]$. Für jede Zerlegung $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_m$ $(\lambda_1 < \alpha, \lambda_m > \beta)$ und eine beliebige Wahl der Zwischenwerte $x_\kappa \in [\lambda_\kappa, \lambda_{\kappa+1}]$ werde $\zeta = \sum_{\nu=1}^{m-1} \gamma(x_\nu)(\mathcal{B}_{\lambda_{\nu+1}} - \mathcal{B}_{\lambda_\nu})$ gesetzt. Überträgt man formal die bekannte Summendefinition des Riemann-Integrals und interpretiert die Konvergenz der Integralsummen der Form ζ im Sinne der Operatornorm, so erhält man, falls es existiert, das "Riemann-Integral" $\int_\alpha^\beta \gamma(\lambda)\, d\mathcal{B}_\lambda$ als Limes dieser Summen. Es existiert z. B. für eine stetige Funktion γ. Die entsprechende Übertragung des Lebesgueschen Integralbegriffs liefert das "Lebesgue-Integral". Es wird gesetzt: $\mathcal{B} = \int_\alpha^\beta \lambda\, d\mathcal{B}_\lambda$, $\gamma(\mathcal{B}) = \int_\alpha^\beta \gamma(\lambda)\, d\mathcal{B}_\lambda$.

14 Sei $A \in \mathfrak{L}(\mathfrak{H})$ ein hermitescher Operator (d. h. es gilt $A = A^*$). Dann existieren Zahlen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und eine Schar $\{A_\lambda \mid \lambda \in [\alpha, \beta]\}$ von Projektionsoperatoren in $\mathfrak{H}$, so daß gilt: a) Für alle $\mu, \lambda \in [\alpha, \beta]$ mit $\mu \leq \lambda$ ist $A_\mu A_\lambda = A_\lambda A_\mu = A_\mu$. b) Es ist $A = \int_\alpha \lambda \, d A_\lambda$ [7, S. 260, Spektralsatz].

15 Die Definition des Integrals $\int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(\lambda) \, d S_\lambda$: Dieses "uneigentliche" Integral definiert man (wie auch sonst üblich) als Limes der "eigentlichen" Integrale $\int_{-\delta}^{\gamma} \gamma(\lambda) \, d S_\lambda$ $(\gamma, \delta > 0)$. Das geschieht nicht im Sinne der Operatornorm (sonst wäre $\int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(\lambda) \, d S_\lambda$ stets beschränkt), sondern folgendermaßen "punktweise": Sei $\{S_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ eine Schar von Projektionsoperatoren in $\mathfrak{H}$, so daß $S_\lambda S_\mu = S_\mu S_\lambda = S_\mu$ für alle $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ mit $\mu \leq \lambda$ gilt. Sei γ eine komplexwertige Funktion auf $\mathbb{R}$, so daß $\int_{-\delta}^{\gamma} \gamma(\lambda) \, d S_\lambda$ im Sinne von 5. 13 für alle $\gamma, \delta > \sigma$ existiert. Ein $\varphi \in \mathfrak{H}$ gehöre zum Definitionsbereich von $\int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(\lambda) \, d S_\lambda$ genau dann, wenn $\lim_{\gamma, \delta \to \infty} \left(\int_{-\delta}^{\gamma} \gamma(\lambda) \, d S_\lambda \right) \varphi$ im Sinne der Normvon $\mathfrak{H}$ existiert; für jedes φ aus diesem Definitionsbereich gelte $\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(\lambda) \, d S_\lambda \right) \varphi = \lim_{\gamma, \delta \to \infty} \left(\int_{-\delta}^{\gamma} \gamma(\lambda) \, d S_\lambda \right) \varphi$.
Es wird gesetzt: $S = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, d S_\lambda$, $\gamma(S) = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(\lambda) \, d S_\lambda$.

16 Sei A ein nicht notwendig beschränkter hermitescher Operator in $\mathfrak{H}$, d. h. es gelte:

a) Der Definitionsbereich $\mathfrak{D}_A$ von A liegt dicht in $\mathfrak{H}$.

b) Für alle $\varphi, \psi \in \mathfrak{D}_A$ gilt $(A\varphi, \psi) = (\varphi, A\psi)$.

c) Wenn zu einem $\psi \in \mathfrak{H}$ ein $\psi' \in \mathfrak{H}$ existiert, so daß für alle $\varphi \in \mathfrak{D}_A$ $(A\varphi, \psi) = (\varphi, \psi')$ gilt, so ist $\psi \in \mathfrak{D}_A$. Dann existiert eine Schar $\{A_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ von Projektionsoperatoren in $\mathfrak{H}$, sodaß gilt: a) Für alle $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ ist $A_\mu A_\lambda = A_\lambda A_\mu = A_\mu$.
b) Es ist $A = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, d A_\lambda$. (A wird auch "selbstadjungierter Operator" genannt.)

C. Funktionale

Sei $\mathcal{V}$ ein Vektorraum. Ein Operator von $\mathcal{V}$ in $\mathbb{C}$ heisse ein Funktional auf (oder über) $\mathcal{V}$.

5.17 Sei $\mathcal{N}$ ein normierter Raum. Die Gesamtheit $\mathcal{L}(\mathcal{N}, \mathbb{C})$ aller auf $\mathcal{N}$ definierten linearen beschränkten Funktionale ist ein normierter Raum (5.11). Es wird $\mathcal{N}' = \mathcal{L}(\mathcal{N}, \mathbb{C})$ gesetzt. $\mathcal{N}'$ heisse der zu $\mathcal{N}$ konjugierte Raum. Mit $\mathcal{N}$ ist auch $\mathcal{N}'$ ein Banachraum.

5.18 Wir betrachten auf $\mathcal{N}'$ folgende Topologien:

a) Normtopologie: In dieser Topologie bilden die Mengen $\mathcal{U}_\varepsilon(f_0) = \{f \in \mathcal{N}' \mid \|f - f_0\| < \varepsilon\}$ $(\varepsilon > 0)$ eine Umgebungsbasis von $f_0 \in \mathcal{N}'$.

b) Schwache Topologie: Hier bilden die Mengen $\mathcal{U}_{\varepsilon, a_1, \dots, a_m}(f_0) = \{f \in \mathcal{N}' \mid |f(a_\nu) - f_0(a_\nu)| < \varepsilon, \nu = 1, 2, \dots, m\}$ $(a_1, \dots, a_m \in \mathcal{N})$ eine Umgebungsbasis. Die Begriffe "offen", "abgeschlossen", "kompakt", "konvergent" usw., die sich auf diese Topologie beziehe werden durch den Zusatz "schwach" gekennzeichnet.

5.19 Jede Kugel $K_r = \{f \in \mathcal{N}' \mid \|f\| \leq r\}$ $(r \geq 0)$ ist in der schwachen Topologie von $\mathcal{N}'$ kompakt [7, S. 70, Satz III] ("Kompaktheit" wird im Sinne von [11, S. 60] verstanden. In diesem Fall ist "kompakt" und "bikompakt" [7, S. 40] gleichbedeutend, da $\mathcal{N}'$ in jeder der betrachteten Topologie ein Hausdorffraum ist.)

5.20 Sei $\mathcal{A}_S$ eine symmetrische Algebra. Ein auf $\mathcal{A}_S$ definiertes lineares Funktional f heisse positiv, wenn $f(a^* a) \geq 0$ für alle $a \in \mathcal{A}_S$ gilt $(a^* = j(a))$.

5.21 Sei $\mathcal{A}_{BS}$ eine Banachsche symmetrische Algebra mit Einselement e . Dann ist die Norm $\|f\|$ eines positiven Funktionals f auf $\mathcal{A}_{BS}$ gleich $f(e)$ [7, S. 201, Satz II] ; insbesondere ist f also beschränkt.

22 Sei $\mathcal{N}$ ein normierter Raum. $\xi : x \to \xi_x(x)$ sei eine Abbildung von $\mathbb{R}$ in den zu $\mathcal{N}$ konjugierten Raum $\mathcal{N}'$. Für jedes $a \in \mathcal{N}$ sei die Abbildung $\xi_a : x \to \xi_a(x) = (\xi_x(x))(a)$ von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$ definiert. Sei $\dot{\xi}_a$ die Ableitung von ξ_a im üblichen Sinne (falls sie existiert). Wenn für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Abbildung $\widetilde{\xi}_x(x) : a \to (\widetilde{\xi}_x(x))(a) = \dot{\xi}_a(x)$ ein Element von $\mathcal{N}'$ ist, so heisse $\dot{\xi}_x : x \to \widetilde{\xi}_x(x)$ die Ableitung von ξ_x.

D. Darstellungen

Es seien $\mathcal{A}, \bar{\mathcal{A}}$ Algebren. Eine Abbildung τ von $\mathcal{A}$ in $\bar{\mathcal{A}}$ heisse ein Homomorphismus, wenn $\tau(\lambda a) = \lambda\tau(a)$, $\tau(a+b) = \tau(a) + \tau(b)$ und $\tau(ab) = \tau(a)\tau(b)$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ und alle $a, b \in \mathcal{A}$ gilt.

23 Sei $\mathcal{A}$ eine Algebra und $\mathcal{V}$ ein Vektorraum über $\mathbb{C}$. Ein Homomorphismus von $\mathcal{A}$ in die Algebra der linearen Operatoren von $\mathcal{V}$ heisse eine Darstellung von $\mathcal{A}$; $\mathcal{V}$ heisse der zugehörige Darstellungsraum.

24 Es seien $\mathcal{A}_N, \bar{\mathcal{A}}_N$ normierte Algebren. Eine Abbildung τ von $\mathcal{A}_N$ in $\bar{\mathcal{A}}_N$ heisse ein stetiger Homomorphismus, wenn τ ein Homomorphismus und e stetige Abbildung ist.

25 Sei $\mathcal{A}_N$ eine normierte Algebra. $\mathcal{N}$ sei ein normierter Raum. Ein stetiger Homomorphismus von $\mathcal{A}_N$ in $\mathfrak{L}(\mathcal{N})$ (5.11) heisse eine stetige Darstellung von $\mathcal{A}_N$ in $\mathfrak{L}(\mathcal{N})$.

26 Es seien $\mathcal{A}_S, \bar{\mathcal{A}}_S$ symmetrische Algebren. Eine Abbildung τ von $\mathcal{A}_S$ in $\bar{\mathcal{A}}_S$ heisse ein symmetrischer Homomorphismus, wenn τ ein Homomorphismus ist und wenn $(\tau(a))^* = \tau(a^*)$ für alle $a \in \mathcal{A}_S$ gilt.

5.27 Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Ein symmetrischer Homomorphismus σ von $\mathcal{A}_S$ in $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ (5.11) heisse eine symmetrische Darstellung. Im folgenden soll unter einer Darstellung einer symmetrischen Algebra in eine Algebra der Form $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ (mit einem Hilbertraum $\mathcal{H}$) stets eine symmetrische Darstellung verstanden werden. Der Zusatz "symmetrisch" wird dann weggelassen. Der Darstellungsraum einer solchen Darstellung wird stets mit $\mathcal{H}_\sigma$ bezeichnet; also $\sigma : \mathcal{A}_S \to \mathcal{L}(\mathcal{H}_\sigma)$.

5.28 Die Darstellungen $\sigma_1 : \mathcal{A}_S \to \mathcal{L}(\mathcal{H}_{\sigma_1})$ und $\sigma_2 : \mathcal{A}_S \to \mathcal{L}(\mathcal{H}_{\sigma_2})$ heissen äquivalent, wenn eine Isometrie T von $\mathcal{H}_{\sigma_1}$ auf $\mathcal{H}_{\sigma_2}$ existiert, so daß $T\sigma_1(a)T^{-1} = \sigma_2(a)$ für alle $a \in \mathcal{A}_S$ gilt.

5.29 Eine Darstellung $\sigma : \mathcal{A}_S \to \mathcal{L}(\mathcal{H}_\sigma)$ heisse zyklisch, wenn ein $\varphi \in \mathcal{H}_\sigma$ existiert, so daß die Menge $\{\sigma(a)\varphi \mid a \in \mathcal{A}_S\}$ dicht liegt in $\mathcal{H}_\sigma$. φ heisst ein zyklischer Vektor. Nach [7, S. 253] kann jede beliebige Darstellung in eine direkte Summe([7, S. 252]) von zyklischen Darstellungen zerlegt werden.

5.30 Sei σ eine Darstellung von $\mathcal{A}_S$ in $\mathcal{L}(\mathcal{H}_\sigma)$. Dann ist $f_\varphi : a \to f_\varphi(a) = (\sigma(a)\varphi, \varphi)$ für jedes $\varphi \in \mathcal{H}_\sigma$ ein positives Funktional (5.20) auf $\mathcal{A}_S$.

5.31 Sei $\mathcal{A}_{BS}$ eine Banachsche symmetrische Algebra mit einem Einselement e. Jedem positiven Funktional f auf $\mathcal{A}_{BS}$ kann folgendermaßen eine Darstellung $\sigma_f : \mathcal{A}_{BS} \to \mathcal{L}(\mathcal{H}_{\sigma_f})$ zugeordnet werden([7, S. 255, 256]):
Die Menge $\mathfrak{J}_f = \{a \in \mathcal{A}_{BS} \mid f(a^*a) = 0\}$ ist ein Linksideal in $\mathcal{A}_{BS}$. Die Restklassen von $a, b \in \mathcal{A}_{BS}$ modulo $\mathfrak{J}_f$ werden mit $\bar{a}, \bar{b}$ bezeichnet. Der Quotientenraum $\mathcal{A}_{BS}/\mathfrak{J}_f$ ist mit dem inneren Produkt $(\bar{a}, \bar{b}) = f(b^*a)$ ein euklidischer Vektorraum (5.3). Der durch Vervollständigung bezüglich $\|\bar{a}\| = \sqrt{(\bar{a}, \bar{a})}$ entstehende Hilbertraum werde mit $\mathcal{H}_{\sigma_f}$ bezeichnet. Zu jedem $b \in \mathcal{A}_{BS}$ werde folgendermaßen ein Operator $\sigma_f(b)$ in $\mathcal{H}_{\sigma_f}$ definiert: $\sigma_f(b)$ sei die Fortsetzung des in $\mathcal{A}_{BS}/\mathfrak{J}_f$ definierten Operators $\bar{a} \to \overline{ba}$ zu einem Operator in $\mathcal{H}_{\sigma_f}$. Dann ist $\sigma_f : b \to \sigma_f(b)$ eine zyklische Darstellung von $\mathcal{A}_{BS}$ in $\mathcal{L}(\mathcal{H}_{\sigma_f})$.

Sei f ein positives Funktional auf $\mathcal{A}_{BS}$ und $\sigma_f : \mathcal{A}_{BS} \to \mathcal{L}(\mathcal{H}_{\sigma_f})$ die nach 5.31 konstruierte Darstellung. Für die Restklasse $\bar{e} \in \mathcal{A}_{BS}/\mathcal{J}_f$ des Einselements $e \in \mathcal{A}_{BS}$ gilt $(\sigma_f(b)\bar{e}, \bar{e}) = (\overline{be}, \bar{e}) = f(e^*be) = f(b)$ für alle $b \in \mathcal{A}_{BS}$. Das nach 5.30 für $\bar{e}$ konstruierte Funktional $f_{\bar{e}}$ ist daher gleich f.

Sei σ eine zyklische Darstellung von $\mathcal{A}_{BS}$ in $\mathcal{L}(\mathcal{H}_\sigma)$ mit dem zyklischen Vektor $\varphi \in \mathcal{H}_\sigma$. Nach 5.30 sei f_φ und nach 5.31 σ_{f_φ} konstruiert. Dann sind die Darstellungen σ und σ_{f_φ} äquivalent ([7, S. 255]).

E. Filter und Filterbasen

Gegeben sei eine Menge M. Ein nichtleeres System $\mathfrak{F}$ von Teilmengen von M heisse ein Filter auf M, wenn folgendes gilt: a) Aus $F \in \mathfrak{F}$ und $F \subseteq F' \subseteq M$ folgt $F' \in \mathfrak{F}$. b) Aus $F \in \mathfrak{F}$ und $F' \in \mathfrak{F}$ folgt $F \cap F' \in \mathfrak{F}$. c) Die leere Menge gehört nicht zu $\mathfrak{F}$.

Ein nichtleeres System $\mathfrak{G}$ von Teilmengen von M heisst eine Filterbasis auf M, wenn folgendes gilt: a) Zu $G \in \mathfrak{G}$ und $G' \in \mathfrak{G}$ existiert ein $G'' \in \mathfrak{G}$ mit $G'' \subseteq G \cap G'$. b) Die leere Menge gehört nicht zu $\mathfrak{G}$.

Wird zu jedem G aus einer Filterbasis $\mathfrak{G}$ jede Obermenge von G in M zu den Mengen von $\mathfrak{G}$ hinzugenommen, so erhält man einen Filter $\mathfrak{G}'$ ([11, S. 41]). $\mathfrak{G}'$ heisse der von $\mathfrak{G}$ in M erzeugte Filter. $\mathfrak{G}$ heisse eine Filterbasis für $\mathfrak{G}'$.

Ein Filter $\mathfrak{F}'$ auf M heisse eine Verfeinerung von $\mathfrak{F}$, wenn $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}'$ gilt.

Ein Filter $\mathfrak{F}$ auf einem topologischen Raum M_T heisse konvergent gegen gegen $m \in M_T$, wenn $\mathfrak{F}$ eine Verfeinerung des aus den Umgebungen von m bestehenden Filters $\mathfrak{U}(m)$ ist. Das ist der Fall genau dann, wenn zu jedem $U(m) \in \mathfrak{U}(m)$ ein $F \in \mathfrak{F}$ mit $F \subseteq U(m)$ existiert. Eine Filterbasis $\mathfrak{G}$ auf M_T

heisse konvergent gegen m, wenn der von $\mathfrak{G}$ in M_τ erzeugte Filter gegen m konvergiert. Das ist der Fall genau dann, wenn zu jedem $U(m) \in \mathfrak{U}(m)$ ein $G \in \mathfrak{G}$ mit $G \subset U(m)$ existiert.

5.39 Wenn ein konvergenter Filter $\mathfrak{F}$ bzw. eine konvergente Filterbasis $\mathfrak{G}$ gegen genau ein $m \in M_\tau$ konvergiert (das ist z. B. der Fall, wenn M_τ ein Hausdorffraum ist), so werde $m = \lim \mathfrak{F}$ bzw. $m = \lim \mathfrak{G}$ gesetzt.

5.40 Ein Element $m \in M_\tau$ heisse <u>Häufungspunkt</u> des Filters $\mathfrak{F}$ bzw. der Filterbasis $\mathfrak{G}$, wenn jede Umgebung $U(m)$ mit jedem $F \in \mathfrak{F}$ bzw. $G \in \mathfrak{G}$ einen nichtleeren Durchschnitt hat. Ein Element $m \in M_\tau$ ist Häufungspunkt des Filters $\mathfrak{F}$ genau dann, wenn m Häufungspunkt irgendeiner Filterbasis für $\mathfrak{F}$ ist.

5.41 Ein Hausdorffraum ist kompakt genau dann, wenn jeder Filter (oder jede Filterbasis) auf ihm mindestens einen Häufungspunkt hat ([11, S. 58]).

5.42 Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $\mathfrak{F}$ eine Filterbasis auf $\mathfrak{L}'(\mathcal{H})$, dem zu $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$ (5.15) konjugierten Raum (5.17). Für $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ und $F \in \mathfrak{F}$ werde $F(A) = \{f(A) \mid f \in F\}$ gesetzt. Dann ist $\mathfrak{F}(A) = \{F(A) \mid F \in \mathfrak{F}\}$ eine Filterbasis auf $\mathbb{C}$. Sei $g \in \mathfrak{L}'(\mathcal{H})$. Dann gilt: $\mathfrak{F}$ konvergiert schwach (5.18 b) gegen g genau dann, wenn $\mathfrak{F}(A)$ für jedes $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ gegen $g(A)$ konvergiert ([11, S. 52]). Das Entsprechende gilt auch für die Eigenschaft "Häufungspunkt von $\mathfrak{F}$".

Vorstufen von Modellen der Quantenmechanik mit Zeitoperator

In diesem Abschnitt beschreiben wir den Weg, der uns über mehrere Vorstufen hinweg zu den Modellen mit Zeitoperator führt, die das Ziel der vorliegenden Arbeit sind.

Zunächst weisen wir nach, daß es kein sinnvolles übliches Modell der Quantenmechanik mit Zeitoperator gibt und zeigen, daß das - neben anderen Einwänden - ein wesentlicher Mangel der üblichen Modelle ist (z. B. fehlende Lorentz-Invarianz).

Auf der Suche nach sinnvollen Modellen mit Zeitoperator diskutieren wir in § 7 eine Möglichkeit, die Rolle der Zeit in den üblichen Modellen zu ändern (Verzicht auf den Zeitparameter). Die Modelle, die wir auf diese Weise durch Modifizierung üblicher Modelle erhalten, sind jedoch im allgemeinen immer noch nicht sinnvoll. Hier erweist sich die Struktur der üblichen Modelle als zu eng.

In den Paragraphen 8 und 9 suchen wir daher allgemeinere Strukturen. Wir definieren Darstellungen üblicher Modelle und ein alle diese Darstellungen umfassendes Modell, das dann die gewünschte allgemeinere Struktur besitzt.

§ 6. Einwände gegen die üblichen Modelle der Quantenmechanik

A. Das Fehlen eines sinnvollen üblichen Modells mit Zeitoperator

Sei $\mathfrak{f}$ ein physikalisches System mit Zeitmessung (1.5). Die kanonischen Observablen seien: $\{E^\nu_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}\}, \{F^\nu_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, f^{\mathfrak{f}})$. Dann ist die $f^{\mathfrak{f}}$-te Ortsobservable $\{E^{f^{\mathfrak{f}}}_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ die Zeitobservable: Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ bedeutet $E^{f^{\mathfrak{f}}}_\lambda$ die Eigenschaft "die Zeit ist $\leq \lambda$ ".

$\mathcal{M}_1^{\mathfrak{P}} = \left(\mathcal{H}_1^{\mathfrak{P}}, \mathcal{R}_1^{\mathfrak{P}}, \{H_1^{\mathfrak{P}}(t) \mid t \in \mathbb{R}\}, \mathcal{D}_1^{\mathfrak{P}}\right)$ sei ein zu $\mathfrak{P}$ gehöriges übliches Modell der Quantenmechanik. Der $f^{\mathfrak{P}}$-te Ortsoperator $Q_{1,f^{\mathfrak{P}}}^{\mathfrak{P}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, d\mathcal{R}_1^{\mathfrak{P}}(E_\lambda^{f^{\mathfrak{P}}})$ (2.4) heiße Zeitoperator; $\mathcal{M}_1^{\mathfrak{P}}$ nennen wir ein übliches Modell der Quantenmechanik mit Zeitoperator. Der folgende Satz zeigt, daß $\mathcal{M}_1^{\mathfrak{P}}$ kein sinnvolles Modell sein kann.

6.1 Satz: Es existiert kein physikalisch sinnvolles übliches Modell der Quantenmechanik für ein physikalisches System mit Zeitmessung.

Beweis: Angenommen, $\mathcal{M}_1^{\mathfrak{P}}$ ist ein physikalisch sinnvolles übliches Modell für ein System $\mathfrak{P}$ mit Zeitmessung. Dann existiert mindestens ein Zustand $\phi : t \to \phi(t)$ von $\mathfrak{P}$ in $\mathcal{M}_1^{\mathfrak{P}}$. Es seien t_1, t_2 beliebige voneinander verschiedene reelle Zahlen. Wir betrachten die Eigenschaften $E_{t_1}^{f^{\mathfrak{P}}}$, $\bar{E}_{t_1}^{f^{\mathfrak{P}}}$ und die Wahrscheinlichkeiten $w_{\phi,t_1}(E_{t_1}^{f^{\mathfrak{P}}}), w_{\phi,t_2}(\bar{E}_{t_1}^{f^{\mathfrak{P}}})$. Sei $t_1 < t_2$. Durch eine Messung zur Zeit t_1 wird $E_{t_1}^{f^{\mathfrak{P}}}$ mit Sicherheit bestätigt; zur Zeit t_2 wird dagegen die Negation $\bar{E}_{t_1}^{f^{\mathfrak{P}}}$ von $E_{t_1}^{f^{\mathfrak{P}}}$ mit Sicherheit bestätigt. Da $\mathcal{M}_1^{\mathfrak{P}}$ sinnvoll sein soll, erhalten wir nach $\mathcal{D}_1^{\mathfrak{P}}$ folgende Beziehungen: $w_{\phi,t_1}(E_{t_1}^{f^{\mathfrak{P}}}) = (\mathcal{R}_1^{\mathfrak{P}}(E_{t_1}^{f^{\mathfrak{P}}})\phi(t_1), \phi(t_1)) = 1$, $w_{\phi,t_2}(\bar{E}_{t_1}^{f^{\mathfrak{P}}}) = ((I_{\mathcal{H}^{\mathfrak{P}}} - \mathcal{R}_1^{\mathfrak{P}}(E_{t_1}^{f^{\mathfrak{P}}}))\phi(t_2), \phi(t_2))$. Aus der ersten Gleichung folgt wegen $\|\phi(t_1)\| = 1$ die Beziehung $\mathcal{R}_1^{\mathfrak{P}}(E_{t_1}^{f^{\mathfrak{P}}})\phi(t_1) = \phi(t_1)$; aus der zweiten folgt $\mathcal{R}_1^{\mathfrak{P}}(E_{t_1}^{f^{\mathfrak{P}}})\phi(t_2) = 0$. Man erhält: $(\phi(t_1), \phi(t_2)) = (\mathcal{R}_1^{\mathfrak{P}}(E_{t_1}^{f^{\mathfrak{P}}})\phi(t_1), \phi(t_2)) = (\phi(t_1), \mathcal{R}_1^{\mathfrak{P}}(E_{t_1}^{f^{\mathfrak{P}}})\phi(t_2)) = 0$. Es ist also $\phi(t_1)$ orthogonal zu $\phi(t_2)$. Als Lösung der Schrödingergleichung von $\mathcal{M}_1^{\mathfrak{P}}$ ist ϕ insbesondere differenzierbar. Daraus folgt die Stetigkeit der Funktion $t \to (\varphi, \phi(t))$ für jedes $\varphi \in \mathcal{H}_1^{\mathfrak{P}}$. Für irgendein $t_0 \in \mathbb{R}$ ist dann auch $t \to (\varphi, \phi(t_0))$ eine auf $\mathbb{R}$ definierte stetige Funktion. Wegen der Orthogonalität von $\phi(t_0)$ und $\phi(t)$ für $t \neq t_0$ gilt $(\phi(t_0), \phi(t)) \to 0$ für $t \to t_0$. Das ist wegen $(\phi(t_0), \phi(t_0)) = 1$ ein Widerspruch zur Stetigkeit von $t \to (\phi(t_0), \phi(t))$. Damit ist Satz 6.1 bewiesen.

Aufgrund von Satz 6.1 kann man folgende Einwände gegen die Struktur der üblichen Modelle erheben:

a) Es existiert kein sinnvolles übliches Modell, das entsprechend der Forderung der Relativitätstheorie invariant bei Lorentz-Transformationen ist. Ein solches Modell müßte nämlich einem physikalischen System mit Zeitmessung zugeordnet sein, da sonst die Zeit gegenüber den Koordinaten des Ortes ausgezeichnet wäre; es kann daher nach 6.1 nicht sinnvoll sein. Damit ist dem Gültigkeitsbereich der üblichen Modelle der Quantenmechanik eine weitere Grenze gezogen; sie sind höchstens für nichtrelativistische Systeme gültig, d. h. für Systeme, bei denen die auftretenden Geschwindigkeiten klein gegen die Lichtgeschwindigkeit sind.

b) Es ergibt sich ein Widerspruch zum Korrespondenzprinzip; denn Satz 6.1 hat kein Analogon in der klassischen Mechanik. Nach 3.5, a können wir annehmen, daß sinnvolle Modelle der klassischen Mechanik für Systeme mit Zeitmessung existieren. Wenn die Struktur der klassischen Modelle eine formale Gleichstellung der Zeit mit den Koordinaten des Ortes erlaubt, so sollte eine solche Gleichstellung auch in der Quantenmechanik möglich sein.

c) Der Verzicht auf den Zeitoperator infolge 6.1 bedeutet, daß eine Energie-Zeit-Unschärferelation analog zu den Heisenbergschen Unschärferelationen (2.13) nicht abgeleitet werden kann. Eine solche Unschärfebeziehung würde jedoch der Erfahrung entsprechen ([3, S. 43]).

B. Argumente gegen die Parameterrolle der Zeit in den üblichen Modellen.

In einem üblichen Modell der Quantenmechanik tritt die Zeit als Parameter auf: Nach 2.1, 4, bedeutet $\omega_{\phi,t}(E)$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Eigenschaft E im Zustand ϕ und zum Zeitpunkt t durch eine Messung bestätigt wird. Die folgenden Argumente zeigen, daß ein solcher Zeitparameter in den üblichen Modellen der Quantenmechanik fragwürdig ist:

a) Die Parameter-Bedeutung der Zeit setzt voraus, daß einem physikalischen System eindeutig reelle Zahlen als Zeitpunkte zugeordnet werden können (Absolutheit der Zeit); sonst wäre die Aussage "zum Zeitpunkt t " sinnlos. In Wirklichkeit ist diese Zuordnung nur durch eine Zeitmessung zu vollziehen ("Zeit" ist nicht absolut, sondern abhängig von der Messung); die Zeitpunkte können nur Meßwerte sein. Ein Meßwert hängt im allgemeinen von der verwendeten Meßapparatur und von der Durchführung der Messung ab (z. B. vom Ablesen des Meßwertes). Der Zeitparameter ist daher fragwürdig.

b) Die Annahme, daß die Meßwerte eindeutig sind und nicht von der Meßapparatur und der Durchführung der Messung abhängen, ist typisch für die klassische Physik. Die Parameterrolle der Zeit ist daher ein Element der klassischen Physik; ihre Sonderstellung in den üblichen Modellen der Quantenmechanik ist von prinzipieller Art. Es ist unwahrscheinlich, daß das "richtige" Modell der Quantenmechanik für ein physikalisches System eine derartige Asymmetrie aufweist und in seiner Struktur "Reste" der klassischen Physik enthält.

c) Nach dem Beweis zu Satz 6.1 verhindert die Parameterrolle der Zeit die Konstruktion sinnvoller üblicher Modelle für Systeme mit Zeitmessung. Da Modelle für derartige Systeme von großer Bedeutung wären, erscheint der Zeitparameter fraglich.

d) Es bedeutet $w_{\phi,t}(E)$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass E im Zustand ϕ und zur Zeit t durch Messung bestätigt wird. Jede Wahrscheinlichkeitsaussage eines üblichen Modells hat diese Form. In Wirklichkeit erfordert die Durchführung einer Messung stets eine bestimmte Zeitspanne, so daß also derartige Wahrscheinlichkeitsaussagen höchstens näherungsweise sinnvoll sein können. Es ist fraglich, ob die Meßdauer für eine Messung immer vernachlässigt werden kann. Die Verwendung des Zeitparameters ist daher auch aus diesem Grunde problematisch.

C. Folgerungen für das Kausalprinzip

Die Schrödingergleichung eines zum physikalischen System $\mathfrak{S}$ gehörigen üblichen Modells $\mathcal{M}_1^{\mathfrak{S}}$ der Quantenmechanik ist eine Differentialgleichung von erster Ordnung. Unter bestimmten Voraussetzungen, die im allgemeinen erfüllt sind, ist eine Lösung $\phi: t \to \phi(t)$ eindeutig bestimmt, wenn $\phi(t_0)$ für ein $t_0 \in \mathbb{R}$ gegeben ist. Dann gilt: Wenn die Menge $\{ w_{\phi, t_0}(E) \mid E \in \mathfrak{S} \}$ von Wahrscheinlichkeitsaussagen für ein $t_0 \in \mathbb{R}$ bekannt ist, so liegt $\{ w_{\phi, t}(E) \mid E \in \mathfrak{S} \}$ für alle $t \in \mathbb{R}$ bereits fest. Alle möglichen Aussagen über das System $\mathfrak{S}$ in Vergangenheit und Zukunft liegen eindeutig fest, wenn sie zum gegenwärtigen Zeitpunkt bekannt sind (Determiniertheit des Zeitablaufs, Kausalprinzip). Die Parameterrolle der Zeit in $\mathcal{M}_1^{\mathfrak{S}}$ hat also im allgemeinen die Gültigkeit des Kausalprinzips zur Folge. In einer Theorie ohne Zeitparameter wird das Kausalprinzip in dieser Form nicht mehr gültig sein.

D. Unzulänglichkeiten üblicher Modelle mit periodischem Potential

Modelle der Quantenmechanik mit periodischem Potential werden in der Festkörperphysik benötigt (z. B. Metall- oder Kristallphysik); sie haben daher eine große Bedeutung.

Sei $\mathfrak{S}$ ein physikalisches System und $\mathcal{M}_1^{\mathfrak{S}} = \left(\mathcal{H}_1^{\mathfrak{S}}, \mathcal{R}_1^{\mathfrak{S}}, \{ H_1^{\mathfrak{S}}(t) \mid t \in \mathbb{R} \}, \mathcal{D}_1^{\mathfrak{S}} \right)$ ein übliches Modell der Quantenmechanik. Der Einfachheit wegen nehmen wir $f^{\mathfrak{S}} = 1$ an. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir außerdem annehmen, daß $\mathcal{H}_1^{\mathfrak{S}} = L^2(\mathbb{R}_{f^{\mathfrak{S}}}) = L^2(\mathbb{R})$, $Q_{1,1}^{\mathfrak{S}} = Q_1^{\mathfrak{S}} = x \cdot$ und $P_{1,1}^{\mathfrak{S}} = P_1^{\mathfrak{S}} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$ gilt. U sei eine periodische auf $\mathbb{R}$ definierte reellwertige Funktion (Potentialfunktion); $U(x) \cdot$ sei der zugehörige Multiplikationsoperator in $L^2(\mathbb{R})$. Es gelte $H_1^{\mathfrak{S}}(t) = \alpha \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) + U(x) \cdot$ mit einer Konstanten $\alpha \in \mathbb{C}$. Dann nennen wir $\mathcal{M}_1^{\mathfrak{S}}$ ein Modell mit periodischem Potential. Die Schrödingergleichung $-\frac{\hbar}{i} \dot{\phi}(t) = H_1^{\mathfrak{S}}(t) \phi(t)$ eines solchen Modells hat stets sogenannte nicht normierbare Lösungen. Das sind Funktionen $\psi: (x,t) \to \psi(x,t)$

die zwar Lösungen der Differentialgleichung sind, jedoch nicht in $L^2(\mathbb{R})$ liegen, weil sie nicht normiert werden können ($\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x,t)|^2 dx = \infty$). Die einfachsten Beispiele erhalten wir für $U = 0$ ("kräftefreie" Systeme): Lösungen der Form $\psi(x,t) = e^{-ic_1 t + ic_2 x}$ (mit Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$) sind nicht normierbar (ebene oder de Broglie' sche Wellen). Den nicht normierbaren Lösungen ist in $\mathcal{M}_1^0$ kein Zustand zugeordnet. Wegen ihrer physikalischen Bedeutung kann auf derartige Lösungen jedoch nicht verzichtet werden.

Um diese Schwierigkeiten zu umgehen, wird in der Literatur häufig ein "Normierungsvolumen" eingeführt. Anstelle des $L^2(\mathbb{R})$ wird zur Beschreibung von 0 der Hilbertraum $L^2(J)$ der auf einem beschränkten Intervall J quadratisch integrierbaren Funktionen verwendet. Als Orts- bzw. Impulsoperator dient anstelle von $x\cdot$ bzw. $\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$ derjenige Operator, der im Innern von J wie $x\cdot$ bzw. $\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$ wirkt; wir bezeichnen ihn mit $(x\cdot)_J$ bzw. $(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x})_J$. In gleicher Weise wird auch ein "neuer" Hamiltonoperator definiert. Ein mathematisches Modell, das wir auf diese Weise zur Beschreibung von 0 erhalten, kann kein übliches sein, da die Operatoren $(x\cdot)_J, (\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x})_J$ nicht der Bedingung 2.1, 2.c, genügen. Denn andernfalls würde eine Isometrie V von $L^2(J)$ auf $L^2(\mathbb{R})$ existieren so, daß $V(x\cdot)_J V^{-1} = x\cdot$ gilt. Das wäre ein Widerspruch, da $(x\cdot)_J$ und damit auch $V(x\cdot)_J V^{-1}$ ein beschränkter Operator, $x\cdot$ jedoch ein nichtbeschränkter ist. Allgemeiner als dieses mathematische Modell ist das in [12] beschriebene. Es verwendet anstelle von $L^2(\mathbb{R})$ einen inseparablen Hilbertraum zur Beschreibung von 0 und kann bereits aus diesem Grunde nicht der Bedingung 2.1, 2.c, genügen.

Es zeigt sich also, daß im Fall eines periodischen Potentials die Struktur der üblichen Modelle unzulänglich ist.

§ 7. Modifizierung üblicher Modelle der Quantenmechanik

Wir wollen Modelle der Quantenmechanik aufstellen, die alle im vorigen Paragraphen aufgezeigten Nachteile und Unzulänglichkeiten vermeiden. Es zeigt sich, daß wir uns darauf beschränken können, sinnvolle Modelle für physikalische Systeme mit Zeitmessung zu suchen. Alle übrigen Probleme (Zeitparameter, periodische Potentiale) werden dabei mitgelöst.

Die gesuchten neuen Modelle der Quantenmechanik werden nur noch für Systeme mit Zeitmessung betrachtet, so daß wir ausschließlich Modelle mit Zeitoperator erhalten. Das ist wegen der Forderung nach Lorentz-Invarianz sinnvoll. Es bedeutet praktisch auch keine Einschränkung der Allgemeinheit, da man annehmen kann, daß jedes gegebene System auf sinnvolle Weise in ein System mit Zeitmessung eingebettet werden kann.

Häufig werden wir uns im folgenden nach dem Korrespondenzprinzip orientieren. In Frage kommt die Korrespondenz zu den Modellen der klassischen Mechanik für Systeme mit Zeitmessung.

A. Modifizierung durch Verzicht auf den Zeitparameter

Nach § 6, A, erhalten wir für physikalische Systeme mit Zeitmessung keine sinnvollen üblichen Modelle der Quantenmechanik. Wir wollen versuchen, die Struktur üblicher Modelle so zu modifizieren, daß wir sinnvolle Modelle für Systeme mit Zeitmessung erhalten.

Es ist naheliegend, in der Struktur üblicher Modelle zunächst den Zeitparameter t zu beseitigen. Folgende Argumente sprechen dafür:

a) Die Einwände gegen den Zeitparameter in § 6, B.

b) In einem Modell der Quantenmechanik für ein System mit Zeitmessung ist der Zeitparameter "überflüssig" ("überflüssige Struktur"), da eine Zeitobservable vorhanden ist und die Zeit daher gemessen werden kann.

Dementsprechend verändern wir die Definition der üblichen Modelle 2.1 für Systeme mit Zeitmessung so, daß wir Modelle ohne Zeitparameter erhalten. Ein solches Modell für ein System $\mathfrak{P}$ mit Zeitmessung werden wir mit $\mathcal{M}_2^{\mathfrak{P}}$ bezeichnen. Wir nehmen folgende Änderungen vor:

1. Wir beschränken uns auf solche Hamiltonoperatoren, die vom Parameter t unabhängig sind. $\mathcal{M}_2^{\mathfrak{P}}$ wird also anstelle einer Schar $\{H_2^{\mathfrak{P}}(t) | t \in \mathbb{R}\}$ einen zeitunabhängigen Hamiltonoperator $H_2^{\mathfrak{P}}$ enthalten.

   Die Beschränkung auf zeitunabhängige Hamiltonoperatoren für Systeme mit Zeitmessung ist auch nach dem Korrespondenzprinzip plausibel. Nach 3.5, b, sind sinnvolle Hamiltonfunktionen von Modellen der klassischen Mechanik für diese Systeme im allgemeinen zeitunabhängig. Korrespondenzgemäß gilt dann das Entsprechende auch für die Hamiltonoperatoren (nach § 4).

2. Die entscheidende Änderung betrifft die Definition der Zustände und Wahrscheinlichkeiten in 2.1, 4. Um vom Parameter t loszukommen wollen wir (abweichend von $\mathcal{D}_1^{\mathfrak{P}}$ in 2.1, 4) eine Lösung $\phi : t \to \phi(t)$ der Schrödingergleichung $-\frac{\hbar}{i}\dot{\phi}(t) = H_2^{\mathfrak{P}}\phi(t)$ ($\|\phi(t)\| = 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$) nur dann als Zustand von $\mathfrak{P}$ in $\mathcal{M}_2^{\mathfrak{P}}$ bezeichnen, wenn $\phi(t)$ unabhängig von t ist. Jede solche Lösung hat die Form $\phi : t \to \varphi$ mit einem Vektor φ aus dem Hilbertraum $\mathcal{H}_2^{\mathfrak{P}}$ von $\mathcal{M}_2^{\mathfrak{P}}$. Wegen $\dot{\phi}(t) = 0$ (für alle $t \in \mathbb{R}$) nimmt die Schrödingergleichung in diesem Fall die einfache Gestalt $H_2^{\mathfrak{P}}\varphi = 0$ an. Dabei tritt der Parameter t nicht

mehr auf. Wir können auf diesen Parameter dann ganz verzichten: Anstelle der Funktion $\phi : t \to \varphi$ bezeichnen wir nur den Bildvektor φ als Zustand; bei der Definition der Wahrscheinlichkeit $w_{\phi,t}(E) = (\mathcal{R}_2^{\mathfrak{F}}(E)\varphi,\varphi)$ $(\mathcal{R}_2^{\mathfrak{F}} \in \mathcal{M}(_2^{\mathfrak{F}})$ lassen wir den Index t weg und ersetzen ϕ durch φ.

Die hier vorgenommene Änderung von 2.1, 4, kann folgendermaßen plausibel gemacht werden:

a. Da $\mathfrak{F}$ eine Zeitobservable enthält, ist das gesamte "raumzeitliche" Verhalten von $\mathfrak{F}$ durch einen einzigen Vektor $\varphi \in \mathcal{H}_2^{\mathfrak{F}}$ bereits bestimmt. (In der Form $(\mathcal{R}_2^{\mathfrak{F}}(E)\varphi,\varphi)$ bekommt man Aussagen sowohl in bezug auf den Ort als auch in bezug auf die Zeit, wenn E in $\mathfrak{F}$ variiert.) Es ist daher sinnvoll, nur konstante Vektorfunktionen $\phi : t \to \varphi$ in $\mathcal{M}(_2^{\mathfrak{F}}$ als Zustände zu interpretieren. Andernfalls wäre das System $\mathfrak{F}$ überbestimmt. Auch das Bestehen der Gleichung $H_2^{\mathfrak{F}}\varphi = \mathcal{O}$ ist plausibel. Aus experimentellen Gründen (§ 7, B) sind im allgemeinen nur solche $\varphi \in \mathcal{H}_2^{\mathfrak{F}}$ als Zustände interpretierbar, die so einer Gleichung genügen.

b. Eine Lösung $t \to (q_1(t),\dots,q_{f\mathfrak{F}}(t), p_1(t),\dots,p_{f\mathfrak{F}}(t))$ des Hamiltonschen Gleichungssystems (3.3) eines zu $\mathfrak{F}$ gehörigen klassischen Modells $\mathcal{M}_0^{\mathfrak{F}}$ kann nach 3.5, c, im allgemeinen nur dann als Zustand interpretiert werden, wenn die Gleichung $H_0^{\mathfrak{F}}(q_1(t),\dots,q_{f\mathfrak{F}}(t), p_1(t),\dots,p_{f\mathfrak{F}}(t)) = \mathcal{O}$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt. Nach dem Korrespondenzprinzip kann dann eine Lösung $\phi : t \to \phi(t)$ der Schrödingergleichung $-\frac{\hbar}{i}\dot{\phi}(t) = H_2^{\mathfrak{F}}\phi(t)$ nur dann als Zustand interpretiert werden, wenn $H_2^{\mathfrak{F}}\phi(t) = \mathcal{O}$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt. Aus $H_2^{\mathfrak{F}}\phi(t) = \mathcal{O}$ folgt $\dot{\phi}(t) = \mathcal{O}$ (für alle $t \in \mathbb{R}$) und daraus $\phi(t) = \varphi$ für ein geeignetes $\varphi \in \mathcal{H}_2^{\mathfrak{F}}$. Als Zustände in $\mathcal{M}_2^{\mathfrak{F}}$ kommen also nur Vektorfunktionen $\phi : t \to \varphi$ so, daß $H_2^{\mathfrak{F}}\varphi = \mathcal{O}$ gilt, in Betracht, wie es der oben vorgenommenen Änderung von 2.1, 4, entspricht.

Damit erhalten wir folgende gegenüber 2.1 geänderte

7.1 **Definition :** Sei $\mathfrak{F}$ ein physikalisches System mit Zeitmessung. Die kanonischen Observablen seien $\{E_\lambda^\nu \mid \lambda \in \mathbb{R}\}, \{F_\lambda^\nu \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ $(\nu = 1, \ldots, f^{\mathfrak{F}})$.

Es sei :

1. $\mathcal{H}_2^{\mathfrak{F}}$ ein Hilbertraum,
2. $R_2^{\mathfrak{F}}$ eine Abbildung von $\mathfrak{F}$ auf die Menge $\mathcal{P}_{\mathcal{H}_2^{\mathfrak{F}}}$ der Projektionsoperatoren in $\mathcal{H}_2^{\mathfrak{F}}$, so dass (wie in 2.1) gilt :
   a) $R_2^{\mathfrak{F}}(\bar{E}) = I_{\mathcal{H}_2^{\mathfrak{F}}} - R_2^{\mathfrak{F}}(E)$ für alle $E \in \mathfrak{F}$.
   b) $R_2^{\mathfrak{F}}(\sup\{E_1, E_2\}) = \sup\{R_2^{\mathfrak{F}}(E_1), R_2^{\mathfrak{F}}(E_2)\}$ für alle $E_1, E_2 \in \mathfrak{F}$.
   c) Es existiert eine Isometrie $V_2^{\mathfrak{F}}$ von $\mathcal{H}_2^{\mathfrak{F}}$ auf $L^2(\mathbb{R}_{f^{\mathfrak{F}}})$ so, dass $\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, dR_2^{\mathfrak{F}}(E_\lambda^\nu) = (V_2^{\mathfrak{F}})^{-1}(x_\nu) V_2^{\mathfrak{F}}$ und $\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, dR_2^{\mathfrak{F}}(F_\lambda^\nu) = (V_2^{\mathfrak{F}})^{-1}\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\right) V_2^{\mathfrak{F}}$ für $\nu = 1, 2, \ldots, f^{\mathfrak{F}}$ gilt.
3. $H_2^{\mathfrak{F}}$ ein (nicht notwendig beschränkter) Operator in $\mathcal{H}_2^{\mathfrak{F}}$.
4. $D_2^{\mathfrak{F}}$ die folgende Festsetzung : "Jeder Vektor $\varphi \in \mathcal{H}_2^{\mathfrak{F}}$ so, dass $H_2^{\mathfrak{F}}\varphi = 0$ und $\|\varphi\| = 1$ gilt, heisse ein Zustand von $\mathfrak{F}$ im Modell $\mathcal{M}_2^{\mathfrak{F}}$. Für alle $E \in \mathfrak{F}$ sei $w_\varphi(E) = (R_2^{\mathfrak{F}}(E)\varphi, \varphi)$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Messung von E im Zustand φ das Ergebnis 1 liefert".

Dann heisse das Quadrupel $\mathcal{M}_2^{\mathfrak{F}} = (\mathcal{H}_2^{\mathfrak{F}}, R_2^{\mathfrak{F}}, H_2^{\mathfrak{F}}, D_2^{\mathfrak{F}})$ ein zu $\mathfrak{F}$ gehöriges modifiziertes übliches Modell der Quantenmechanik.

7.2 **Definition :** Es heisse $Q_{2,\nu}^{\mathfrak{F}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, dR_2^{\mathfrak{F}}(E_\lambda^\nu)$ bzw. $P_{2,\nu}^{\mathfrak{F}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, dR_2^{\mathfrak{F}}(F_\lambda^\nu)$ der Operator der ν-ten Orts- bzw. Impulskoordinate $(\nu = 1, 2, \ldots, f^{\mathfrak{F}} - 1)$, $Q_{2,f^{\mathfrak{F}}}^{\mathfrak{F}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, dR_2^{\mathfrak{F}}(E_\lambda^{f^{\mathfrak{F}}})$ der Zeitoperator, $-P_{2,f^{\mathfrak{F}}}^{\mathfrak{F}} = -\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, dR_2^{\mathfrak{F}}(F_\lambda^{f^{\mathfrak{F}}})$ der Energieoperator, $H_2^{\mathfrak{F}}$ der Hamiltonoperator und die Gleichung $H_2^{\mathfrak{F}}\varphi = 0$ die Schrödingergleichung des Modells $\mathcal{M}_2^{\mathfrak{F}}$.

B. Die Konstruktion modifizierter üblicher Modelle nach dem Korrespondenzprinzip

Sei $\mathfrak{F}$ ein physikalisches System mit Zeitmessung ; $\{E_\lambda^\nu \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ und $\{F_\lambda^\nu \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ $(\nu = 1, \ldots, f^{\mathfrak{F}})$ seien die kanonischen Observablen. Wir betrachten ein zu $\mathfrak{F}$ gehöriges Modell $\mathcal{M}_0^{\mathfrak{F}}$ der klassischen Mechanik mit einer von t

unabhängigen Hamiltonfunktion $H_0^{\mathfrak{H}}$.

Analog zur Konstruktion in § 4 versuchen wir, dem Modell $\mathcal{M}_0^{\mathfrak{H}}$ ein "in Korrespondenz" stehendes Modell $\mathcal{M}_2^{\mathfrak{H}} = (\mathcal{H}_2^{\mathfrak{H}}, \mathcal{R}_2^{\mathfrak{H}}, H_2^{\mathfrak{H}}, \mathfrak{D}_2^{\mathfrak{H}})$ zuzuordnen.

Wir setzen $\mathcal{H}_2^{\mathfrak{H}} = L^2(\mathbb{R}_{f^{\mathfrak{H}}})$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, d\mathcal{R}_2^{\mathfrak{H}}(E_\lambda^\nu) = x_\nu \cdot$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, d\mathcal{R}(F_\lambda^\nu) = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_\nu}$ und gewinnen daraus $\mathcal{R}_2^{\mathfrak{H}}(E_\lambda^\nu)$, $\mathcal{R}_2^{\mathfrak{H}}(F_\lambda^\nu)$ für $\nu = 1, 2, \ldots, f^{\mathfrak{H}}$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Die weitere Konstruktion von $\mathcal{R}_2^{\mathfrak{H}}$ kann wie in § 4 erfolgen.

Den Hamiltonoperator $H_2^{\mathfrak{H}}$ konstruieren wir nach dem Verfahren in § 4 folgendermaßen: $H_2^{\mathfrak{H}} = Op(H_0^{\mathfrak{H}}) = H_0^{\mathfrak{H}}(x_1 \cdot, \ldots, x_{f^{\mathfrak{H}}} \cdot, \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_{f^{\mathfrak{H}}}})$.

Wir betrachten nun einen wichtigen Spezialfall.
Sei $\mathfrak{S}$ ein physikalisches System so, daß $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{H}$ und $f^{\mathfrak{S}} = f^{\mathfrak{H}} - 1$ gilt; die kanonischen Observablen von $\mathfrak{S}$ seien diejenigen von $\mathfrak{H}$ für $\nu = 1, 2, \ldots, f^{\mathfrak{H}} - 1$ (wie am Schluss von § 3). Sei $\mathcal{M}_0^{\mathfrak{S}}$ ein dazugehöriges Modell der klassischen Mechanik. (In der Praxis geht man im allgemeinen umgekehrt von einem System $\mathfrak{S}$ aus und erweitert zum System $\mathfrak{H}$.) Für $\mathcal{M}_0^{\mathfrak{S}}$ sei eine zeitunabhängige Hamiltonfunktion $H_0^{\mathfrak{S}}$ gegeben. (Das ist häufig der Fall; nämlich für ein sogenanntes abgeschlossenes System $\mathfrak{S}$.) Die Hamiltonfunktion $H_0^{\mathfrak{H}}$ von $\mathcal{M}_0^{\mathfrak{H}}$ möge die in 3. 5, b, angegebene besonders häufige Form haben, d. h. es gelte $H_0^{\mathfrak{H}}(q_1, \ldots, q_{f^{\mathfrak{H}}}, p_1, \ldots, p_{f^{\mathfrak{H}}}) = H_0^{\mathfrak{S}}(q_1, \ldots, q_{f^{\mathfrak{H}}-1}, p_1, \ldots, p_{f^{\mathfrak{H}}-1}) + p_{f^{\mathfrak{H}}}$ für alle $(q_1, \ldots, q_{f^{\mathfrak{H}}}, p_1, \ldots, p_{f^{\mathfrak{H}}}) \in \mathbb{R}_{2f^{\mathfrak{H}}}$.

Die Konstruktion des Hamiltonoperators $H_2^{\mathfrak{H}}$ ergibt in diesem Fall:
$H_2^{\mathfrak{H}} = Op(H_0^{\mathfrak{H}}) = Op(H_0^{\mathfrak{S}}) + \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_{f^{\mathfrak{H}}}} = H_0^{\mathfrak{S}}(x_1 \cdot, \ldots, x_{f^{\mathfrak{H}}-1} \cdot, \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_{f^{\mathfrak{H}}-1}}) + \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_{f^{\mathfrak{H}}}}$.
Es ist $Op(H_0^{\mathfrak{S}})$ im allgemeinen ein hermitescher Operator, dessen Spektralschar mit $\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_{f^{\mathfrak{H}}}}$ vertauschbar ist. ($Op(H_0^{\mathfrak{S}})$ "wirkt" nur auf die Koordinaten $x_1, x_2, \ldots, x_{f^{\mathfrak{H}}-1}$.)

Diese spezielle Form des Hamiltonoperators $H_2^{\mathfrak{H}}$ von $\mathcal{M}_2^{\mathfrak{H}}$ kann für viele praktisch wichtige Systeme experimentell bestätigt werden; etwa auf fol-

gende Weise: Nach 7.2 ist $-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_{f\mathfrak{F}}}$ der Energieoperator; erfahrungsgemäß ist jedoch andererseits ein Energieoperator im allgemeinen eine Funktion der Orts- und Impulsoperatoren, hat also die Form $H_0^{\mathfrak{S}}(x_{1\bullet}, \ldots, x_{f}, \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_{f\mathfrak{F}-1}})$. (Z. B. für den Harmonischen Oszillator [1]): $H_0^{\mathfrak{S}}(x_{1\bullet}, \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_1}) = (\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_1})^2 + (x_{1\bullet})^2$; oder für das Wasserstoffatom[1]: $H_0^{\mathfrak{W}}(x_{1\bullet}, x_{2\bullet}, x_{3\bullet}, \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_3}) = \sum_{\nu=1}^{3}(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_\nu})^2 - (\sum_{\nu=1}^{3}(x_{\nu\bullet})^2)^{-\frac{1}{2}}$.)
Beide Operatoren können experimentell nicht unterschieden werden; also muß der Raum der Zustände entsprechend der Festsetzung $\mathfrak{D}_2^{\mathfrak{F}}$ durch die Gleichung $H_0^{\mathfrak{S}}(x_{1\bullet}, \ldots, \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots)\varphi = -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_{f\mathfrak{F}}}$ oder $H_2^{\mathfrak{F}}\varphi = (H_0^{\mathfrak{S}}(x_{1\bullet}, \ldots) + \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_{f\mathfrak{F}}})\varphi = \mathfrak{O}$ bestimmt sein.

C. Auftretende Schwierigkeiten

Ein übliches Modell $\mathcal{M}_1^{\mathfrak{F}}$ der Quantenmechanik, das zu einem System $\mathfrak{F}$ mit Zeitmessung gehört (ein übliches Modell mit Zeitoperator) kann nach § 6, A, kein physikalisch sinnvolles Modell sein. Es erweist sich nun, daß ein zu $\mathfrak{F}$ gehöriges modifiziertes übliches Modell $\mathcal{M}_2^{\mathfrak{F}}$ der Quantenmechanik (ein modifiziertes übliches Modell mit Zeitoperator) im allgemeinen immer noch kein physikalisch sinnvolles Modell ist.

Nach § 7, B, wird nämlich der Hamiltonoperator $H_2^{\mathfrak{F}}$ eines Modells aufgrund des Korrespondenzprinzips häufig die auch experimentell bestätigte Form $H_2^{\mathfrak{F}} = Op(H_0^{\mathfrak{S}}) + \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_{f\mathfrak{F}}}$ haben müssen $(\mathfrak{H}_2^{\mathfrak{F}} = L^2(\mathfrak{R}_{f\mathfrak{F}}))$. Es zeigt sich jedoch, daß die Gleichung $H_2^{\mathfrak{F}}\varphi = (Op(H_0^{\mathfrak{S}}) + \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_{f\mathfrak{F}}})\varphi = \mathfrak{O}$ $(\varphi \in \mathfrak{H}$ im allgemeinen nur die triviale Lösung $\varphi = \mathfrak{O}$ besitzt. Wenn aber $H_2^{\mathfrak{F}}\varphi =$ nur für $\varphi = \mathfrak{O}$ gilt, so gibt es keine Zustände im Modell $\mathcal{M}_2^{\mathfrak{F}}$. Dann ist $\mathcal{M}_2^{\mathfrak{F}}$ ein physikalisch sinnloses Modell.

Wir begnügen uns damit, den häufig vorkommenden Fall zu untersuchen, in dem $Op(H_0^{\mathfrak{S}})$ ein hermitescher Operator ist, dessen Spektralschar mit

---

[1] Von konstanten Faktoren (Masse, Ladung usw.) wollen wir hier absehe

$\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_{i_0}}$ vertauschbar ist und dessen Spektrum nur aus Eigenwerten besteht (z. B. beim Harmonischen Oszillator). Der folgende Satz 7.3 zeigt, daß dann die Gleichung $(\mathcal{O}\rho(H_0^{\mathcal{O}}) + \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_{i_0}})\varphi = \mathcal{O}$ nur die triviale Lösung besitzt.

Die Struktur der modifizierten üblichen Modelle der Quantenmechanik ist also immer noch unzureichend. Auf die Beschreibung etwa des Harmonischen Oszillators kann natürlich in einer quantenmechanischen Theorie nicht verzichtet werden ("Testfall").

3 Satz: Im Hilbertraum $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}_m)$ $(m \geq 1)$ sei ein hermitescher Operator H gegeben, dessen Spektralschar mit $\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_m}$ vertauschbar ist und dessen Spektrum nur aus Eigenwerten besteht. Dann hat die Gleichung $(H + \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_m})\varphi = \mathcal{O}$ in $\mathcal{H}$ nur die Lösung $\varphi = \mathcal{O}$.

Beweis: Angenommen, es existiert ein Vektor $\psi \in \mathcal{H}$, so daß $(H + \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_m})\psi = \mathcal{O}$ und $\psi \neq \mathcal{O}$ gilt. H hat aufgrund der Voraussetzung des Satzes eine Spektraldarstellung der folgenden Gestalt: $H = \sum_{\nu=1}^{\infty} h_\nu H_\nu$. Dabei sind $h_1, h_2, \ldots$ die Eigenwerte von H $(h_\nu \in \mathbb{R}, \nu = 1,2,\ldots)$ und $H_1, H_2, \ldots$ Projektionsoperatoren in $\mathcal{H}$ $(\sum_{\nu=1}^{\infty} H_\nu = I_{\mathcal{H}})$. Es gilt: $\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi}{\partial x_m} = I_{\mathcal{H}}\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi}{\partial x_m} = \sum_{\nu=1}^{\infty} H_\nu \frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi}{\partial x_m}$. Der letzte Ausdruck ist $= \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\hbar}{i}\frac{\partial(H_\nu\psi)}{\partial x_m}$, weil H_ν für $\nu = 1,2,\ldots$ mit $\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_m}$ vertauschbar ist. Wir erhalten: $(H + \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_m})\psi = \sum_{\nu=1}^{\infty} h_\nu H_\nu\psi + \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\hbar}{i}\frac{\partial(H_\nu\psi)}{\partial x_m} = \sum_{\nu=1}^{\infty}(h_\nu I_{\mathcal{H}} + \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_m})H_\nu\psi = \mathcal{O}$. Wegen $H_\mu H_\nu = \delta_{\mu\nu}H_\mu$ $(\mu,\nu = 1,2,\ldots)$ und der vorausgesetzten Vertauschbarkeitseigenschaft folgt: $H_\mu\sum_{\nu=1}^{\infty}(h_\nu I_{\mathcal{H}} + \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_m})H_\nu\psi = (h_\nu I_{\mathcal{H}} + \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_m})H_\mu\psi = \mathcal{O}$ $(\mu = 1,2,\ldots)$. Der Operator $\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_m}$ hat keine Eigenwerte ([1, S. 118]). Daher gilt $H_\mu\psi = \mathcal{O}$ für $\mu = 1,2,\ldots$. Es folgt $\sum_{\nu=1}^{\infty} H_\mu\psi = I_{\mathcal{H}}\psi = \psi = \mathcal{O}$ im Widerspruch zur Annahme $\psi \neq \mathcal{O}$. Satz 7.3 ist damit bewiesen.

D. Auswegsmöglichkeiten

Es hat sich gezeigt, daß die modifizierten üblichen Modelle der Quantenmechanik im allgemeinen noch keine physikalisch sinnvollen Modelle für Systeme mit Zeitmessung sind. Um sinnvolle Modelle für solche Systeme

zu erhalten, wollen wir folgende Änderungsmöglichkeiten diskutieren:

1. Anstelle der Gleichung $H_2^{\vartheta}\varphi = \sigma$ aus $\mathfrak{D}_2^{\vartheta}$ (7.1) können wir die Ungleichung $\| H_2^{\vartheta}\varphi\| < \varepsilon$ für irgendein $\sigma < \varepsilon \in \mathbb{R}$ betrachten und jede normierte Lösung als Zustand bezeichnen. Dann entfallen die unter C aufgezeigten Schwierigkeiten: In sämtlichen interessierenden Fällen erhalten wir "genügend" Lösungen dieser Ungleichung. (Das erkennt man z. B. am Beweis von Satz 7. 3).

   Diese Möglichkeit ist unbefriedigend. Sie trägt von vorherein Näherungscharakter. Wir wollen sie daher nicht weiterverfolgen.

2. Die Schwierigkeiten, die bei modifizierten üblichen Modellen auftreten, weisen darauf hin, daß die Struktur der üblichen Modelle der Quantenmechanik nicht nur bezüglich der Zeit, sondern auch noch in anderer Hinsicht Mängel aufweist. Die folgenden Argumente legen die Vermutung nahe, daß vor allem die Bedingung 2. 1 / 7. 1, 2. c, in dieser Form nicht zwingend ist:

   a) Entscheidend für die Schwierigkeiten bei den modifizierten Modellen ist nach dem Beweis von Satz 7. 3 die Tatsache, daß die Differentiationsoperatoren in 7. 1, 2. c, keine Eigenwerte besitzen. Durch eine Änderung von 7. 1, 2. c, so, daß wir anstelle der Differentiationsoperatoren Operatoren mit Eigenwerten erhalten, könnten daher möglicherweise diese Schwierigkeiten beseitigt werden.

   b) Um die Unzulänglichkeiten zu beseitigen, die bei üblichen Modellen mit periodischem Potential auftraten, war es ebenfalls erforderlich, von dieser Bedingung (in diesem Fall 2. 1, 2. c) abzuweichen.

   Im nächsten Paragraphen werden wir Modelle der Quantenmechanik betrachten, für die 2. 1 / 7. 1, 2. c, nicht mehr notwendig gilt.

§ 8. Darstellungen üblicher und modifizierter üblicher Modelle der Quantenmechanik

In diesem Paragraphen wollen wir einem üblichen und einem modifizierten üblichen Modell der Quantenmechanik (unter Voraussetzungen, die in der Praxis im allgemeinen erfüllt sind,) eine Menge neuer Modelle zuordnen. Das geschieht mit Hilfe von Darstellungen der Operatorenalgebra des Hilbertraumes, der dem Ausgangsmodell angehört. Durch eine solche Darstellung kann dem Ausgangsmodell auf natürliche Weise ein Bildmodell zugeordnet werden.

Für die neuen Modelle, die wir dadurch erhalten, wird 2.1 / 7.1, 2.c, im allgemeinen nicht mehr gültig sein. Am Schluß des vorigen Paragraphen zeigte sich, daß es sinnvoll ist, solche Modelle zu betrachten.

A. Definitionen

$\mathfrak{L}(\mathcal{H})$ bezeichne wie in 5.11 die Algebra der beschränkten linearen überall definierten Operatoren eines Hilbertraumes $\mathcal{H}$. Nach 5.12 ist $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$ eine Banachsche symmetrische Algebra. Sie besitzt ein Einselement (den Einsoperator $I_{\mathcal{H}}$).

Eine Darstellung σ von $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$ in $\mathfrak{L}(\mathcal{H}_\sigma)$ mit dem Darstellungs-Hilbertraum $\mathcal{H}_\sigma$ ist nach der Festsetzung in 5.27 ein symmetrischer Homomorphismus von $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$ in $\mathfrak{L}(\mathcal{H}_\sigma)$. Es erweist sich im folgenden als zweckmäßig, zusätzlich vorauszusetzen, daß σ den Einsoperator $I_{\mathcal{H}} \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ in den Einsoperator $I_{\mathcal{H}_\sigma} \in \mathfrak{L}(\mathcal{H}_\sigma)$ überführt.

Wir betrachten zunächst ein übliches Modell der Quantenmechanik

Definition: Sei $\mathfrak{O}$ ein physikalisches System mit den kanonischen Observablen $\{E^\nu_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}\}, \{F^\nu_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, f^{\mathfrak{O}})$.

Sei $\mathcal{M}_1^{\mathfrak{G}} = (\mathcal{H}_1^{\mathfrak{G}}, \mathcal{R}_1^{\mathfrak{G}}, \{H_1^{\mathfrak{G}}(t) | t \in \mathbb{R}\}, \mathcal{D}_1^{\mathfrak{G}})$ ein zu $\mathfrak{G}$ gehöriges übliches Modell der Quantenmechanik so, daß $H_1^{\mathfrak{G}}(t)$ für jedes $t \in \mathbb{R}$ ein hermitescher Operator ist: $H_1^{\mathfrak{G}}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, d H_{1,\lambda}^{\mathfrak{G}}(t)$.

Sei σ eine Darstellung von $\mathfrak{L}(\mathcal{H}_1^{\mathfrak{G}})$ in $\mathfrak{L}(\mathcal{H}_{1,\sigma}^{\mathfrak{G}})$ mit dem Darstellungs-Hilbertraum $\mathcal{H}_{1,\sigma}^{\mathfrak{G}}$ so, daß $\sigma(I_{\mathcal{H}_1^{\mathfrak{G}}}) = I_{\mathcal{H}_{1,\sigma}^{\mathfrak{G}}}$ gilt.

Es sei:

1. $\sigma(\mathcal{H}_1^{\mathfrak{G}}) = \mathcal{H}_{1,\sigma}^{\mathfrak{G}}$,
2. $(\sigma(\mathcal{R}_1^{\mathfrak{G}}))(E) = \sigma(\mathcal{R}_1^{\mathfrak{G}}(E))$ für alle $E \in \mathfrak{G}$,
3. $\sigma(H_1^{\mathfrak{G}}(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, d\sigma(H_{1,\lambda}^{\mathfrak{G}}(t))$ für alle $t \in \mathbb{R}$,
4. $\sigma(\mathcal{D}_1^{\mathfrak{G}})$ die folgende Festsetzung: "Jede Abbildung ϕ von $\mathbb{R}$ in $\sigma(\mathcal{H}_1^{\mathfrak{G}})$ so, daß $-\frac{\hbar}{i}\dot{\phi}(t) = \sigma(H_1^{\mathfrak{G}}(t))\,\phi(t)$ und $\|\phi(t)\| = 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt, heisse ein Zustand von $\mathfrak{G}$ im Modell $\sigma(\mathcal{M}_1^{\mathfrak{G}})$.

   Für alle $E \in \mathfrak{G}$ sei $w_{\phi,t}(E) = (\sigma(\mathcal{R}_1^{\mathfrak{G}}(E))\,\phi(t), \phi(t))$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine Messung von E im Zustand ϕ und zur Zeit t das Ergebnis 1 liefert".

   Dann heisse das Quadrupel $\sigma(\mathcal{M}_1^{\mathfrak{G}}) = (\sigma(\mathcal{H}_1^{\mathfrak{G}}), \sigma(\mathcal{R}_1^{\mathfrak{G}}), \{\sigma(H_1^{\mathfrak{G}}(t)) | t \in \mathbb{R}\}, \sigma(\mathcal{D}$ das Bild des Modells $\mathcal{M}_1^{\mathfrak{G}}$ bei der Darstellung σ oder das σ-Bild von $\mathcal{M}_1^{\mathfrak{G}}$.

8.2 Definition: Es heisse $\sigma(Q_{1,\nu}^{\mathfrak{G}}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, d\sigma(\mathcal{R}_1^{\mathfrak{G}}(E_\lambda^\nu))$ bzw. $\sigma(P_{1,\nu}^{\mathfrak{G}}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, d\sigma(\mathcal{R}_1^{\mathfrak{G}}(F_\lambda^\nu))$ der Operator der ν-ten Orts- bzw. Impulskoordinate $(\nu = 1, \ldots, f^{\mathfrak{G}})$, $\sigma(H$ der Hamiltonoperator für $t \in \mathbb{R}$ und die Differentialgleichung $-\frac{\hbar}{i}\dot{\phi}($ $= \sigma(H_1^{\mathfrak{G}}(t))\,\phi(t)$ die Schrödingergleichung des Modells $\sigma(\mathcal{M}_1^{\mathfrak{G}})$.

Das Ausgangs-Modell sei nun ein modifiziertes übliches Modell der Quantenmechanik.

3 **Definition:** Sei $\mathfrak{F}$ ein physikalisches System mit Zeitmessung. Die kanonischen Observablen seien: $\{E_\lambda^\nu \mid \lambda \in \mathbb{R}\}, \{F_\lambda^\nu \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ $(\nu = 1,2,\ldots,f^{\mathfrak{F}})$. Sei $\mathcal{M}_2^{\mathfrak{F}} = (\mathcal{H}_2^{\mathfrak{F}}, \mathcal{R}_2^{\mathfrak{F}}, H_2^{\mathfrak{F}}, \mathcal{D}_2^{\mathfrak{F}})$ ein zu $\mathfrak{F}$ gehöriges modifiziertes übliches Modell der Quantenmechanik so, daß $H_2^{\mathfrak{F}}$ ein hermitescher Operator ist: $H_2^{\mathfrak{F}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, d H_{2,\lambda}^{\mathfrak{F}}$.

Sei σ eine Darstellung von $\mathfrak{L}(\mathcal{H}_2^{\mathfrak{F}})$ in $\mathfrak{L}(\mathcal{H}_{2,\sigma}^{\mathfrak{F}})$ mit dem Darstellungs-Hilbertraum $\mathcal{H}_{2,\sigma}^{\mathfrak{F}}$ so, daß $\sigma(I_{\mathcal{H}_2^{\mathfrak{F}}}) = I_{\mathcal{H}_{2,\sigma}^{\mathfrak{F}}}$ gilt.

Es sei:

1. $\sigma(\mathcal{H}_2^{\mathfrak{F}}) = \mathcal{H}_{2,\sigma}^{\mathfrak{F}}$,
2. $(\sigma(\mathcal{R}_2^{\mathfrak{F}}))(E) = \sigma(\mathcal{R}_2^{\mathfrak{F}}(E))$ für alle $E \in \mathfrak{F}$,
3. $\sigma(H_2^{\mathfrak{F}}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, d\sigma(H_{2,\lambda}^{\mathfrak{F}})$,
4. $\sigma(\mathcal{D}_2^{\mathfrak{F}})$ folgende Festsetzung: "Jeder Vektor $\varphi \in \sigma(\mathcal{H}_2^{\mathfrak{F}})$ so, daß $\sigma(H_2^{\mathfrak{F}})\varphi = \mathcal{O}$ und $\|\varphi\| = 1$ gilt, heisse ein Zustand von $\mathfrak{F}$ im Modell $\sigma(\mathcal{M}_2^{\mathfrak{F}})$. Für alle $E \in \mathfrak{F}$ sei $\omega_\varphi(E) = (\sigma(\mathcal{R}_2^{\mathfrak{F}}(E))\varphi, \varphi)$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine Messung von E im Zustand φ das Ergebnis 1 liefert."

Dann heisse das Quadrupel $\sigma(\mathcal{M}_2^{\mathfrak{F}}) = (\sigma(\mathcal{H}_2^{\mathfrak{F}}), \sigma(\mathcal{R}_2^{\mathfrak{F}}), \sigma(H_2^{\mathfrak{F}}), \sigma(\mathcal{D}_2^{\mathfrak{F}}))$ das Bild von $\mathcal{M}_2^{\mathfrak{F}}$ bei der Darstellung σ oder das σ-Bild von $\mathcal{M}_2^{\mathfrak{F}}$.

4 **Definition:** Es heisse $\sigma(Q_{2,\nu}^{\mathfrak{F}}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, d\sigma(\mathcal{R}_2^{\mathfrak{F}}(E_\lambda^\nu))$ bzw. $\sigma(P_{2,\nu}^{\mathfrak{F}}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, d\sigma(\mathcal{R}_2^{\mathfrak{F}}(F_\lambda^\nu))$ der Operator der ν-ten Orts- bzw. Impulskoordinate $(\nu = 1,2,\ldots,f^{\mathfrak{F}} \geq 1)$, $\sigma(Q_{2,f^{\mathfrak{F}}}^{\mathfrak{F}}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, d\sigma(\mathcal{R}_2^{\mathfrak{F}}(E_\lambda^{f^{\mathfrak{F}}}))$ der Zeitoperator, $-\sigma(P_{2,f^{\mathfrak{F}}}^{\mathfrak{F}}) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, d\sigma(\mathcal{R}_2^{\mathfrak{F}}(E_\lambda^{f^{\mathfrak{F}}}))$ der Energieoperator, $\sigma(H_2^{\mathfrak{F}})$ der Hamiltonoperator und die Gleichung $\sigma(H_2^{\mathfrak{F}})\varphi = \mathcal{O}$ die Schrödingergleichung des Modells $\sigma(\mathcal{M}_2^{\mathfrak{F}})$.

Die Definition $\sigma(\mathcal{D}_1^{\mathfrak{F}})$ bzw. $\sigma(\mathcal{D}_2^{\mathfrak{F}})$ unterscheidet sich von $\mathcal{D}_1^{\mathfrak{F}}$ bzw. $\mathcal{D}_2^{\mathfrak{F}}$ dadurch, daß $\sigma(\mathcal{H}_1^{\mathfrak{F}}), \sigma(H_1^{\mathfrak{F}}(t)), \sigma(\mathcal{M}_1^{\mathfrak{F}})$ anstelle von $\mathcal{H}_1^{\mathfrak{F}}, H_1^{\mathfrak{F}}(t), \mathcal{M}_1^{\mathfrak{F}}$ bzw. $\sigma(\mathcal{H}_2^{\mathfrak{F}}), \sigma(H_2^{\mathfrak{F}}), \sigma(\mathcal{M}_2^{\mathfrak{F}})$ anstelle von $\mathcal{H}_2^{\mathfrak{F}}, H_2^{\mathfrak{F}}, \mathcal{M}_2^{\mathfrak{F}}$ stehen.

Die Voraussetzung, daß $H_1^{\mathfrak{S}}(t)$ (für alle $t \in \mathbb{R}$) bzw. $H_2^{\mathfrak{T}}$ hermitesch ist, kann wesentlich abgeschwächt werden (§ 12, B). Es genügt, wenn $H_1^{\mathfrak{S}}(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ bzw. $H_2^{\mathfrak{T}}$ eine Operator-Erweiterung in $\mathfrak{L}(\mathcal{H}_1^{\mathfrak{S}})$ bzw. $\mathfrak{L}(\mathcal{H}_2^{\mathfrak{T}})$ besitzt (mit der Bezeichnung 12.2). Solche Erweiterungen können im allgemeinen sehr einfach konstruiert werden (§ 12, C).

Die Voraussetzung, daß $\sigma(I_{\mathcal{H}_1^{\mathfrak{S}}}) = I_{\mathcal{H}_{1,\sigma}^{\mathfrak{S}}}$ bzw. $\sigma(I_{\mathcal{H}_2^{\mathfrak{T}}}) = I_{\mathcal{H}_{2,\sigma}^{\mathfrak{T}}}$ gilt, ist aus folgendem Grund sinnvoll: Der Operator $I_{\mathcal{H}_1^{\mathfrak{S}}}$ bzw. $I_{\mathcal{H}_2^{\mathfrak{T}}}$ ist der "identisch wahren" Eigenschaft von $\mathfrak{S}$ bzw. $\mathfrak{T}$ zugeordnet; infolge der oben stehenden Bedingung ist nach $\sigma(\mathcal{D}_1^{\mathfrak{S}})$ bzw. $\sigma(\mathcal{D}_2^{\mathfrak{T}})$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Eigenschaft durch Messung bestätigt wird, stets gleich 1. Das ist notwendig dafür, daß $\sigma(\mathcal{M}_1^{\mathfrak{S}})$ bzw. $\sigma(\mathcal{M}_2^{\mathfrak{T}})$ ein sinnvolles Modell ist.

Der Hilbertraum $\mathcal{H}_1^{\mathfrak{S}}$ von $\mathcal{M}_1^{\mathfrak{S}}$ bzw. $\mathcal{H}_2^{\mathfrak{T}}$ von $\mathcal{M}_2^{\mathfrak{T}}$ ist separabel; denn nach 2.1, 2.c, bzw. 7.1, 2.c, ist er isometrisch zum offensichtlich separablen Hilbertraum $L^2(\mathbb{R}_{f^{\mathfrak{S}}})$ bzw. $L^2(\mathbb{R}_{f^{\mathfrak{T}}})$. Dagegen ist $\sigma(\mathcal{H}_1^{\mathfrak{S}})$ bzw. $\sigma(\mathcal{H}_2^{\mathfrak{T}})$ nicht mehr notwendig separabel, wie sich im folgenden zeigen wird. Also genügt $\sigma(\mathcal{M}_1^{\mathfrak{S}})$ bzw. $\sigma(\mathcal{M}_2^{\mathfrak{T}})$ auch nicht mehr notwendig der Bedingung 2.1, 2. bzw. 7.1, 2.c. Insbesondere gelten für die Operatoren der Orts- und Impulskoordinaten 8.2 bzw. 8.4 im allgemeinen nicht mehr die bekannten Vertauschungsrelationen 2.6.

B. Sinnvolle Modelle für Systeme mit Zeitmessung

Sei $\mathfrak{T}$ ein physikalisches System mit Zeitmessung. Ein modifiziertes übliches Modell $\mathcal{M}_2^{\mathfrak{T}}$ ist im allgemeinen kein physikalisch sinnvolles Modell. Die Gründe wurden in § 7, C, aufgezeigt: Die Gleichung $(Op(H_o^{\mathfrak{T}}) + \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_{f^{\mathfrak{T}}}})\varphi = \sigma$ ($Op(H_o^{\mathfrak{T}})$ nach § 7, B) hat in $L^2(\mathbb{R}_{f^{\mathfrak{T}}})$ im allgemeinen nur die triviale Lösung $\varphi = \sigma$ (d.h. der Wert σ ist kein Eigenwert des Operators $Op(H_o^{\mathfrak{T}}) + \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_{f^{\mathfrak{T}}}}$).

Es erweist sich nun, daß man im allgemeinen eine Darstellung σ von $\mathfrak{L}(L^2(\mathbb{R}_{f^{\mathfrak{T}}}))$ in $\mathfrak{L}(\mathcal{H}_\sigma)$ finden kann so, daß die Gleichung $\sigma(Op(H_o^{\mathfrak{T}}) + \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_{f^{\mathfrak{T}}}})\varphi = \sigma$

im Darstellungs-Hilbertraum $\mathfrak{H}_\sigma$ nichttriviale Lösungen besitzt. Wir wollen in zwei Schritten skizzieren, wie man eine solche Darstellung konstruieren kann:

a) Das Spektrum von $\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_{f\varrho}}$ besteht aus den reellen Zahlen und $\mathfrak{O}_p(H_0^\sigma)$ ist nach § 7, B, im allgemeinen ein hermitescher Operator, dessen Spektralschar mit $\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_{f\varrho}}$ vertauschbar ist. Daraus kann geschlossen werden, daß dem Spektrum von $\mathfrak{O}_p(H_0^\sigma)+\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_{f\varrho}}$ im allgemeinen der Wert σ angehört. (Nach folgender hier vereinfachter Schlußweise: Seien A, B hermitesche Operatoren mit den Spektraldarstellungen $A=\sum_{\nu=1}^{m}\alpha_\nu A_\nu, B=\sum_{\nu=1}^{m}\beta_\nu B_\nu$. Es sei $A_\nu B_\mu = B_\mu A_\nu$ für $\mu,\nu = 1,2,\dots,m$. Dann gilt $A+B=\sum_{\nu,\mu=1}^{m}(\alpha_\nu+\beta_\mu)A_\nu B_\mu$. Wenn zu einem α_ν ein β_μ mit $A_\nu B_\mu \neq \sigma$ und $\alpha_\nu = -\beta_\mu$ existiert, so gehört $\alpha_\nu+\beta_\mu=\sigma$ zum Spektrum von $A+B$.)

b) Es sei $H=\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda\, d H_\lambda = \mathfrak{O}_p(H_0^\sigma)+\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_{f\varrho}}$. Der Wert σ möge zum Spektrum $s(H)\subseteq\mathbb{R}$ von H gehören. Die Algebra aller Operatoren der Form $\gamma(H)=\int_{-\infty}^{+\infty}\gamma(\lambda)\, d H_\lambda$ (mit einer auf $\mathbb{R}$ stetigen beschränkten komplexwertigen Funktion γ) werde mit $\mathfrak{L}_H$ bezeichnet ($\mathfrak{L}_H \subseteq \mathfrak{L}(L^2(\mathbb{R}_{f\varrho}))$). Es bezeichne $\tilde{\mathfrak{H}}_\sigma$ den Hilbertraum aller auf $\mathbb{R}$ definierten komplexwertigen Funktionen $f: x \to f(x)$, so daß $f(x)\neq\sigma$ höchstens auf einer abzählbaren Teilmenge $\{x_1, x_2, \dots\}$ des Spektrums $s(H)$ gilt und die Summe $\sum_{\nu=1}^{\infty}|f(x_\nu)|^2$ konvergiert. Für alle $\lambda\in\mathbb{R}$, $f\in\tilde{\mathfrak{H}}_\sigma$ und $x\in\mathbb{R}$ werde gesetzt: $(\delta(H_\lambda)f)(x) = \begin{cases}\sigma & \text{für } x<\lambda \\ f(x) & \text{für } x\geq\lambda\end{cases}$. Dadurch ist für jedes λ ein Projektionsoperator $\delta(H_\lambda)$ in $\tilde{\mathfrak{H}}_\sigma$ definiert. Durch die Zuordnung $\gamma(H)\to\delta(\gamma(H))=\int_{-\infty}^{+\infty}\gamma(\lambda)\, d\,\delta(H_\lambda)$ erhalten wir dann eine Darstellung von $\mathfrak{L}_H$ in $\mathfrak{L}(\tilde{\mathfrak{H}}_\delta)$, die nach [7, S. 316] zu einer Darstellung δ von $\mathfrak{L}(L^2(\mathbb{R}_{f\varrho}))$ in $\mathfrak{L}(\mathfrak{H}_\delta)$ fortgesetzt werden kann, so daß $\tilde{\mathfrak{H}}_\delta \subseteq \mathfrak{H}_\sigma$ gilt. Die Funktion $f_z: x\to f_z(x)=\begin{cases}1 & \text{für } x=z \\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$ ist für jedes $z\in s(H)$ ein Eigenvektor von $\delta(H)=\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda\, d\,\delta(H_\lambda)$ zum Eigenwert z (und zugleich Eigenvektor von $\delta(\gamma(H))$ zum Eigenwert $\gamma(z)$). Für $z=\sigma(\in s(H))$ erhält man insbesondere $\delta(H)f_\sigma=\sigma$. Daher ist δ eine Darstellung der gewünschten Art. $\tilde{\mathfrak{H}}_\sigma$ und daher auch $\mathfrak{H}_\sigma$ ist inseparabel, wenn $s(H)$ überabzählbar ist.

Wir können daher annehmen, daß die bei den modifizierten üblichen Modellen der Quantenmechanik auftretenden Schwierigkeiten (§ 7, C) in passend gewählten σ-Bildern dieser Modelle hinfällig werden, so daß wir physikalisch sinnvolle Modelle $\sigma(\mathcal{M}_2^{\hat{\gamma}})$ für Systeme $\hat{\gamma}$ mit Zeitmessung erhalten (sinnvolle Modelle mit Zeitoperator).

C. Sinnvolle Modelle mit periodischem Potential

In § 6, D, ergaben sich Unzulänglichkeiten bei einem üblichen Modell der Quantenmechanik mit periodischem Potential für ein physikalisches System $\mathcal{O}$. Physikalisch sinnvoll ist dagegen im Fall eines periodischen Potentials das in [12] beschriebene mathematische Modell, das einen inseparablen Hilbertraum verwendet und daher entscheidend von der Struktur üblicher Modelle abweicht.

Es zeigt sich nun, daß wir das Modell aus [12] in seinen Grundzügen auch in der Form $\sigma(\mathcal{M}_1^{\mathcal{O}})$ erhalten können:

Sei $\mathcal{O}$ ein Einelektronensystem ($f^{\mathcal{O}} = 3$). Als Hilbertraum $\mathcal{H}_1^{\mathcal{O}}$ eines üblichen Modells $\mathcal{M}_1^{\mathcal{O}}$ der Quantenmechanik für das System $\mathcal{O}$ können wir den Raum $L^2(\mathbb{R}_3)$ wählen. Sei $\mathfrak{L}_0 \subseteq \mathfrak{L}(L^2(\mathbb{R}_3))$ die Algebra, die aus den Operatoren der Multiplikation mit einer auf $\mathbb{R}_3$ definierten stetigen komplexwertigen und beschränkten Funktion besteht. $\tilde{\mathcal{H}}_\sigma$ bezeichne den Hilbertraum aller auf $\mathbb{R}_3$ definierten komplexwertigen Funktionen f: $(x_1,x_2,x_3) \to f(x_1,x_2,x_3)$, so daß $f(x_1,x_2,x_3) \neq 0$ höchstens an abzählbar vielen Stellen gilt und die Summe der $|f(x_1,x_2,x_3)|^2$ konvergiert. Jedem Element aus $\mathfrak{L}_0$ wird nun derjenige Multiplikationsoperator in $\tilde{\mathcal{H}}_\sigma$ zugeordnet, der mit der gleichen Funktion multipliziert. Dadurch erhalten wir eine Darstellung von $\mathfrak{L}_0$ in $\mathfrak{L}(\tilde{\mathcal{H}}_\sigma)$, die wir nach [7, S. 316] zu einer Darstellung σ von $\mathfrak{L}_0$ in $\mathfrak{L}(\tilde{\mathcal{H}}_\sigma)$ fortsetzen können. Dabei gilt $\tilde{\mathcal{H}}_\sigma \subseteq \mathcal{H}_\sigma$. Wir konstruieren das Modell $\sigma(\mathcal{M}_1^{\mathcal{O}})$.

Der Hilbertraum $\tilde{\mathcal{H}}_\sigma$ ist inseparabel. Er wird in [12, S. 80] zur quantenmechanischen Beschreibung des Systems verwendet. Im Modell $\sigma(\mathcal{M}_1^\sigma)$ tritt er als Teilraum von $\mathcal{H}_\sigma \in \sigma(\mathcal{M}_1^\sigma)$ auf. Bei geeigneter Wahl von σ können wir auch erreichen, daß der Hamiltonoperator aus [12, S. 86, (4.1)] in der Form $\sigma(H_1^\sigma) \in \sigma(\mathcal{M}_1^\sigma)$ erhalten wird. In bezug auf die Ortsmessung erweist sich $\sigma(\mathcal{M}_1^\sigma)$ als umfassender: Der Ort kann genauer gemessen werden als modulo Gitterzelle. Ausserdem wurde in [12] auf die Zeitabhängigkeit verzichtet [12, S. 91]. Im wesentlichen (inseparabler Hilbertraum $\tilde{\mathcal{H}}_\sigma$; Hamiltonoperator) erhalten wir jedoch die Theorie aus [12].

§ 9. Erweiterung üblicher und modifizierter üblicher Modelle der Quantenmechanik

Im vorigen Paragraphen wurden einem üblichen und einem modifizierten üblichen Modell der Quantenmechanik σ-Bilder als neue Modelle zugeordnet. Wir können annehmen, daß wir in geeignet gewählten σ-Bildern sämtlichen Einwänden (§ 6) gegen die Struktur üblicher Modelle gerecht werden: Bezüglich der Zeit nach § 8, B, und bezüglich periodischer Potentiale nach § 8, C.

Die Handhabung dieser σ-Bilder ist jedoch umständlich. Bereits die Konstruktion der Darstellungen σ ist schwierig. Außerdem muß noch entschieden werden, welche Darstellung für ein gegebenes System geeignet ist.

Es ist daher zweckmäßig, ein Modell zu konstruieren, das sämtliche σ-Bilder des zugrunde liegenden üblichen bzw. modifizierten üblichen Modells umfaßt. Ein solches Modell ist dann eine Erweiterung des üblichen bzw. modifizierten üblichen Ausgangs-Modells, da es auch dieses umfaßt (für die identische Abbildung $\sigma_0 : A \to \sigma_0(A) = A$).

A. Erweiterung üblicher Modelle

Wir suchen ein Modell der Quantenmechanik, das sämtliche δ-Bilder $\delta(\mathcal{M}_{\cdot}^{\mathfrak{F}})$ eines üblichen Modells $\mathcal{M}_{\cdot}^{\mathfrak{F}} = (\mathcal{K}_{\cdot}^{\mathfrak{F}}, \mathcal{R}_{\cdot}^{\mathfrak{F}}, \{H_{\cdot}^{\mathfrak{F}}(t) | t \in \mathbb{R}\}, \mathfrak{D}_{\cdot}^{\mathfrak{F}})$ für ein physikalisches System $\mathfrak{F}$ umfaßt. Um ein solches Modell zu finden, betrachten wir den Raum $\mathfrak{L}'(\mathcal{K}_{\cdot}^{\mathfrak{F}})$ der beschränkten linearen Funktionale auf $\mathfrak{L}(\mathcal{K}_{\cdot}^{\mathfrak{F}})$, den zu $\mathfrak{L}(\mathcal{K}_{\cdot}^{\mathfrak{F}})$ konjugierten Raum (5.17).

Jedem Zustand ϕ von $\mathfrak{F}$ in einem Modell $\delta(\mathcal{M}_{\cdot}^{\mathfrak{F}})$ ordnen wir eine Abbildung χ_ϕ von $\mathbb{R}$ in $\mathfrak{L}'(\mathcal{K}_{\cdot}^{\mathfrak{F}})$ zu: Für jedes $t \in \mathbb{R}$ und jedes $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{K}_{\cdot}^{\mathfrak{F}})$ sei $(\chi_\phi(t))(A) = (\delta(A)\phi(t), \phi(t))$. Nach 5.30 ist $\chi_\phi(t) : A \to \chi_\phi(t)(A)$ ein positives Funktional auf $\mathfrak{L}(\mathcal{K}_{\cdot}^{\mathfrak{F}})$ und nach 5.21 ist es normiert: Es gilt $\|\chi_\phi(t)\| = (\chi_\phi(t))(\mathbb{1}_{\mathcal{K}_{\cdot}^{\mathfrak{F}}}) = (\delta(\mathbb{1}_{\mathcal{K}_{\cdot}^{\mathfrak{F}}})\phi(t), \phi(t)) = (\phi(t), \phi(t)) = 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Dem Hamiltonoperator $H_{\cdot}^{\mathfrak{F}}(t)$ von $\mathcal{M}_{\cdot}^{\mathfrak{F}}$ ordnen wir für jedes $t \in \mathbb{R}$ einen Operator $\xi(H_{\cdot}^{\mathfrak{F}}(t))$ im Banachraum $\mathfrak{L}'(\mathcal{K}_{\cdot}^{\mathfrak{F}})$ zu, so, daß gilt: Für jedes δ nach 8.1 und jeden Zustand ϕ von $\mathfrak{F}$ im Modell $\delta(\mathcal{M}_{\cdot}^{\mathfrak{F}})$ genüge $\chi_\phi : t \to \chi_\phi(t)$ der Gleichung $-\frac{\hbar}{i}\dot{\chi}_\phi(t) = \xi(H_{\cdot}^{\mathfrak{F}}(t))\chi_\phi(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ ($\dot{\chi}_\phi(t)$ nach 5.22).

Die physikalischen Aussagen eines Modells $\delta(\mathcal{M}_{\cdot}^{\mathfrak{F}})$ in einem Zustand ϕ sind durch die Wahrscheinlichkeiten $(\delta(R_{\cdot}^{\mathfrak{F}}(E))\phi(t), \phi(t))$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und alle $E \in \mathfrak{F}$ gegeben. Es gilt $(\delta(R_{\cdot}^{\mathfrak{F}}(E))\phi(t), \phi(t)) = \chi_\phi(t)(R_{\cdot}^{\mathfrak{F}}(E))$ für $t \in \mathbb{R}$ und $E \in \mathfrak{F}$. Wir erhalten diese Wahrscheinlichkeiten für sämtliche Zustände ϕ in allen Modellen $\delta(\mathcal{M}_{\cdot}^{\mathfrak{F}})$ zusammen, wenn wir alle $\chi : t \to \chi(t)$ mit $-\frac{\hbar}{i}\dot{\chi}(t) = \xi(H_{\cdot}^{\mathfrak{F}}(t))\chi(t)$ (für alle $t \in \mathbb{R}$) betrachten. (Denn insbesondere genügen sämtliche χ_ϕ dieser Gleichung.) Es genügt jedoch, Lösungen χ zu betrachten, so daß $\chi(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ positiv und normiert ist. (Denn die χ_ϕ genügen ebenfalls dieser Bedingung.)

Wir erhalten also ein Modell, das sämtliche $\delta(\mathcal{M}_{\cdot}^{\mathfrak{F}})$ umfaßt, wenn wir jede Abbildung $\chi : t \to \chi(t)$ so, daß $\frac{\hbar}{i}\dot{\chi}(t) = \xi(H_{\cdot}^{\mathfrak{F}}(t))\chi(t)$ gilt und $\chi(t)$ positiv und normiert ist (für alle $t \in \mathbb{R}$), als Zustand bezeichnen und $(\chi(t))(R_{\cdot}^{\mathfrak{F}}(E))$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und $E \in \mathfrak{F}$ als Meß-Wahrscheinlichkeiten interpretieren. In diesem umfassenden Modell treten die Darstellungen δ nicht mehr auf. Damit gelangen wir zur folgenden

Definition: Sei $\mathcal{O}$ ein physikalisches System mit den kanonischen Observablen $\{E_\lambda^\nu \mid \lambda \in \mathbb{R}\}, \{F_\lambda^\nu \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, f^{\mathcal{O}})$.
Sei $\mathcal{M}_1^{\mathcal{O}} = (\mathcal{H}_1^{\mathcal{O}}, \mathcal{R}_1^{\mathcal{O}}, \{H_1^{\mathcal{O}}(t) \mid t \in \mathbb{R}\}, \mathcal{D}_1^{\mathcal{O}})$ ein zu $\mathcal{O}$ gehöriges übliches Modell der Quantenmechanik so, daß $H_1^{\mathcal{O}}(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ ein hermitescher Operator ist: $H_1^{\mathcal{O}}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, d H_{1,\lambda}^{\mathcal{O}}(t)$.

Es sei:

1. $\mathcal{E}(\mathcal{H}_1^{\mathcal{O}}) = \mathcal{H}_1^{\mathcal{O}}$,
2. $\mathcal{E}(\mathcal{R}_1^{\mathcal{O}}) = \mathcal{R}_1^{\mathcal{O}}$,
3. $\mathcal{E}(H_1^{\mathcal{O}}(t))$ für jedes $t \in \mathbb{R}$ der folgende Operator in $\mathcal{L}'(\mathcal{H}_1^{\mathcal{O}})$:
   Für alle $\gamma, \delta > 0$, alle $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1^{\mathcal{O}})$ und alle $f \in \mathcal{L}'(\mathcal{H}_1^{\mathcal{O}})$ sei
   $((\mathcal{E}(H_1^{\mathcal{O}}(t))_{\gamma,\delta} f)(A) = f(A \int_{-\gamma}^{\delta} \lambda \, d H_{1,\lambda}^{\mathcal{O}}(t)) - (\int_{-\gamma}^{\delta} \lambda \, d H_{1,\lambda}^{\mathcal{O}}(t) A)$.
   Dann sei $\mathcal{E}(H_1^{\mathcal{O}}(t)) f = \lim_{\gamma,\delta \to \infty} (\mathcal{E}(H_1^{\mathcal{O}}(t))_{\gamma,\delta} f$ für jedes $f \in \mathcal{L}'(\mathcal{H}_1^{\mathcal{O}})$, für das dieser Limes im Sinne der Norm von $\mathcal{L}'(\mathcal{H}_1^{\mathcal{O}})$ existiert.
4. $\mathcal{E}(\mathcal{D}_1^{\mathcal{O}})$ die folgende Festsetzung: "Jede Abbildung ξ_φ von $\mathbb{R}$ in $\mathcal{L}'(\mathcal{H}_1^{\mathcal{O}})$ so, daß $-\frac{\hbar}{i} \dot{\xi}_\varphi(t) = \mathcal{E}(H_1^{\mathcal{O}}(t)) \xi_\varphi(t)$ und $\|\xi_\varphi(t)\| = 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt und $\xi_\varphi(t)$ für jedes t ein positives Funktional ist, heisse ein Zustand von $\mathcal{O}$ im Modell $\mathcal{E}(\mathcal{M}_1^{\mathcal{O}})$. Für alle $E \in \mathcal{O}$ sei $w_{\varphi,t}(E) = (\xi_\varphi(t))(\mathcal{R}_1^{\mathcal{O}}(E))$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine Messung von E im Zustand ξ_φ und zur Zeit t das Ergebnis 1 liefert".

Dann heisse das Quadrupel $\mathcal{E}(\mathcal{M}_1^{\mathcal{O}}) = (\mathcal{E}(\mathcal{H}_1^{\mathcal{O}}), \mathcal{E}(\mathcal{R}_1^{\mathcal{O}}), \{\mathcal{E}(H_1^{\mathcal{O}}(t)) \mid t \in \mathbb{R}\}, \mathcal{E}(\mathcal{D}_1^{\mathcal{O}}))$ die Erweiterung von $\mathcal{M}_1^{\mathcal{O}}$.

Wir zeigen nun, daß der Operator $\mathcal{E}(H_1^{\mathcal{O}}(t))$ unter 3. der geforderten Bedingung genügt. Zur Vereinfachung wollen wir dabei zusätzlich annehmen, daß $H_1^{\mathcal{O}}(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ beschränkt ist. Dann gilt $(\mathcal{E}(H_1^{\mathcal{O}}(t)) f)(A) = -f(A H_1^{\mathcal{O}}(t) - H_1^{\mathcal{O}}(t) A)$ für alle $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1^{\mathcal{O}})$ und alle $f \in \mathcal{L}'(\mathcal{H}_1^{\mathcal{O}})$.

Sei σ eine Darstellung von $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1^{\mathcal{O}})$ in $\mathcal{L}(\mathcal{H}_{1,\sigma}^{\mathcal{O}})$ und ϕ ein Zustand von $\mathcal{O}$ im Modell $\sigma(\mathcal{M}_1^{\mathcal{O}})$. Für jedes $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1^{\mathcal{O}})$ und jedes $t \in \mathbb{R}$ gilt dann:

$(-\frac{\hbar}{i}\dot{\xi}_{\phi}(t))(A) = -\frac{\hbar}{i}(\sigma(A)\dot{\phi}(t),\phi(t)) - \frac{\hbar}{i}(\sigma(A)\phi(t),\dot{\phi}(t)) = (\sigma(A)(-\frac{\hbar}{i}\dot{\phi}(t)),\phi(t)) - (\sigma(A)\phi$
$,(-\frac{\hbar}{i}\dot{\phi}(t))) = (\sigma(A)\sigma(H_1^{\sigma}(t))\phi(t),\phi(t)) - (\sigma(A)\phi(t),\sigma(H_1^{\sigma}(t))\phi(t)) = (\sigma(A H_1^{\sigma}(t) -$
$H_1^{\sigma}(t)A)\phi(t),\phi(t)) = (\xi_{\phi}(t))(A H_1^{\sigma}(t) - H_1^{\sigma}(t)A) = (\mathcal{E}(H_1^{\sigma}(t))\xi_{\phi}(t))(A)$.
Es folgt $-\frac{\hbar}{i}\dot{\xi}_{\phi}(t) = \mathcal{E}(H_1^{\sigma}(t))\xi_{\phi}(t)$ für jedes $t \in \mathcal{R}$, was zu zeigen war. Das Modell $\mathcal{E}(\mathcal{M}_1^{\sigma})$ ist also umfassender als jedes $\sigma(\mathcal{M}_1^{\sigma})$.

Die Voraussetzung über den Hamiltonoperator in 9.1 kann analog zu § 8 ebenfalls abgeschwächt werden. Es genügt, wenn $H_1^{\sigma}(t)$ für alle t ei Operator-Erweiterung in $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1^{\sigma})$ besitzt (§ 12, B).

Die Orts- und Impulsoperatoren, die wir nun definieren, stimmen wegen $\mathcal{E}(\mathcal{R}_1^{\sigma}) = \mathcal{R}_1^{\sigma}$ mit denen des Ausgangs-Modells $\mathcal{M}_1^{\sigma}$ überein.

9.2 Definition: Es heisse $\mathcal{E}(Q_{1,\nu}^{\sigma}) = \int_{-\infty}^{+\infty}\lambda\, d(\mathcal{E}(\mathcal{R}_1^{\sigma}))(E_{\lambda}^{\nu})$ $(= Q_{1,\nu}^{\sigma})$ bzw. $\mathcal{E}(P_{1,\nu}^{\sigma}) = \int_{-\infty}^{+\infty}\lambda\, d(\mathcal{E}(\mathcal{R}_1^{\sigma}))(F_{\lambda}^{\nu})$ $(= P_{1,\nu}^{\sigma})$ der Operator der ν-ten Orts- bzw. Impuls-koordinate $(\nu = 1,2,\ldots,f^{\sigma})$, $\mathcal{E}(H_1^{\sigma}(t))$ der Hamiltonoperator für $t \in \mathcal{R}$ und die Differentialgleichung $-\frac{\hbar}{i}\dot{\xi}_{\xi}(t) = \mathcal{E}(H_1^{\sigma}(t))\xi_{\xi}(t)$ die Schrödingergleichung des Modells $\mathcal{E}(\mathcal{M}_1^{\sigma})$.

Im Gegensatz zu sämtlichen bisherigen Modellen der Quantenmechanik ist der Hamiltonoperator von $\mathcal{E}(\mathcal{M}_1^{\sigma})$ kein Operator im Hilbertraum.

B. Erweiterung modifizierter üblicher Modelle

Sei $\mathfrak{A}$ ein physikalisches System mit Zeitmessung. Analog zu A suchen wir ein Modell der Quantenmechanik, das sämtliche σ-Bilder $\sigma(\mathcal{M}_2^{\mathfrak{A}})$ eines zu $\mathfrak{A}$ gehörigen modifizierten üblichen Modells $\mathcal{M}_2^{\mathfrak{A}} = (\mathcal{H}_2^{\mathfrak{A}}, \mathcal{R}_2^{\mathfrak{A}}, H_2^{\mathfrak{A}}, \mathcal{D}_2^{\mathfrak{A}})$ umfaßt.

Jedem Zustand φ von $\mathfrak{A}$ in einem Modell $\sigma(\mathcal{M}_2^{\mathfrak{A}})$ ordnen wir ein Funktiona aus $\mathfrak{B}'(\mathcal{H}_2^{\mathfrak{A}})$ zu: Für jedes $A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}_2^{\mathfrak{A}})$ sei $g_{\varphi}(A) = (\sigma(A)\varphi,\varphi)$.

Dem Hamiltonoperator $H_2^{\mathfrak{P}}$ von $\mathcal{M}_2^{\mathfrak{P}}$ ordnen wir einen Operator $\mathcal{E}(H_2^{\mathfrak{P}})$ in $\mathcal{L}'(\mathcal{H}_2^{\mathfrak{P}})$ zu so, daß folgendes gilt: Für jede Darstellung δ nach 8.3 und jeden Zustand φ von $\mathfrak{P}$ im Modell $\delta(\mathcal{M}_2^{\mathfrak{P}})$ genüge q_φ der Gleichung $\mathcal{E}(H_2^{\mathfrak{P}})q_\varphi = \mathcal{O}$.

In Analogie zu A erhalten wir ein Modell, das sämtliche $\delta(\mathcal{M}_2^{\mathfrak{P}})$ umfaßt, wenn wir jedes positive und normierte Funktional $q \in \mathcal{L}'(\mathcal{H}_2^{\mathfrak{P}})$ so, daß $\mathcal{E}(H_2^{\mathfrak{P}})q = \mathcal{O}$ gilt, als Zustand bezeichnen und $q(\mathcal{R}_2^{\mathfrak{P}}(E))$ für alle $E \in \mathfrak{P}$ als Meß-Wahrscheinlichkeiten interpretieren.

3 Definition: Sei $\mathfrak{P}$ ein physikalisches System mit Zeitmessung. Die kanonischen Observablen seien: $\{E_\lambda^\nu \mid \lambda \in \mathbb{R}\}, \{F_\lambda^\nu \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ $(\nu = 1, 2, \dots, f^{\mathfrak{P}})$.

Sei $\mathcal{M}_2^{\mathfrak{P}} = (\mathcal{H}_2^{\mathfrak{P}}, \mathcal{R}_2^{\mathfrak{P}}, H_2^{\mathfrak{P}}, \mathcal{D}_2^{\mathfrak{P}})$ ein dazugehöriges modifiziertes übliches Modell der Quantenmechanik, so daß $H_2^{\mathfrak{P}}$ ein hermitescher Operator ist: $H_2^{\mathfrak{P}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, d H_{2,\lambda}^{\mathfrak{P}}$.

Es sei:

1. $\mathcal{E}(\mathcal{H}_2^{\mathfrak{P}}) = \mathcal{H}_2^{\mathfrak{P}}$,
2. $\mathcal{E}(\mathcal{R}_2^{\mathfrak{P}}) = \mathcal{R}_2^{\mathfrak{P}}$,
3. $\mathcal{E}(H_2^{\mathfrak{P}})$ der folgende Operator in $\mathcal{L}'(\mathcal{H}_2^{\mathfrak{P}})$: Für alle $\gamma, \delta > 0$, alle $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2^{\mathfrak{P}})$ und alle $f \in \mathcal{L}'(\mathcal{H}_2^{\mathfrak{P}})$ sei $((\mathcal{E}(H_2^{\mathfrak{P}}))_{\gamma\delta} f)(A) = f(A \int_{-\gamma}^{\delta} \lambda \, d H_{2,\lambda}^{\mathfrak{P}})$.
   Dann sei $\mathcal{E}(H_2^{\mathfrak{P}}) f = \lim_{\gamma,\delta \to \infty} (\mathcal{E}(H_2^{\mathfrak{P}}))_{\gamma\delta} f$ für jedes $f \in \mathcal{L}'(\mathcal{H}_2^{\mathfrak{P}})$, für das dieser Limes im Sinne der Norm von $\mathcal{L}'(\mathcal{H}_2^{\mathfrak{P}})$ existiert.
4. $\mathcal{E}(\mathcal{D}_2^{\mathfrak{P}})$ die folgende Festsetzung: "Jedes positive Funktional $q \in \mathcal{L}'(\mathcal{H}_2^{\mathfrak{P}})$ so, daß $\mathcal{E}(H_2^{\mathfrak{P}})q = \mathcal{O}$ und $\|q\| = 1$ gilt, heisse ein Zustand von $\mathfrak{P}$ im Modell $\mathcal{E}(\mathcal{M}_2^{\mathfrak{P}})$. Für alle $E \in \mathfrak{P}$ sei $w_q(E) = q(\mathcal{R}_2^{\mathfrak{P}}(E))$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine Messung von E im Zustand q das Ergebnis 1 liefert."

Dann heiße das Quadrupel $\mathcal{E}(\mathcal{M}_2^{\mathfrak{P}}) = (\mathcal{E}(\mathcal{H}_2^{\mathfrak{P}}), \mathcal{E}(\mathcal{R}_2^{\mathfrak{P}}), \mathcal{E}(H_2^{\mathfrak{P}}), \mathcal{E}(\mathcal{D}_2^{\mathfrak{P}}))$ die Erweiterung von $\mathcal{M}_2^{\mathfrak{P}}$.

Wir zeigen, daß $\mathcal{E}(H_2^{\mathfrak{A}})$ in 3. die geforderte Eigenschaft besitzt. Zur Vereinfachung nehmen wir wieder an, daß $H_2^{\mathfrak{A}}$ beschränkt ist. Dann gilt $(\mathcal{E}(H_2^{\mathfrak{A}})f)(A) = f(A H_2^{\mathfrak{A}})$ für alle $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2^{\mathfrak{A}})$ und alle $f \in \mathcal{L}'(\mathcal{H}_2^{\mathfrak{A}})$.

Sei δ eine Darstellung von $\mathcal{L}(\mathcal{H}_2^{\mathfrak{A}})$ in $\mathcal{L}(\mathcal{H}_{2,\delta}^{\mathfrak{A}})$ und φ ein Zustand von $\mathfrak{A}$ in $\delta(\mathcal{M}_2^{\mathfrak{A}})$. Dann gilt $(\mathcal{E}(H_2^{\mathfrak{A}})g_\varphi)(A) = g_\varphi(A H_2^{\mathfrak{A}}) = (\delta(A H_2^{\mathfrak{A}})\varphi, \varphi) = (\delta(A)\underbrace{\delta(H_2^{\mathfrak{A}})\varphi}_{=\sigma}, \varphi) = \sigma$ für alle $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2^{\mathfrak{A}})$. Es folgt $\mathcal{E}(H_2^{\mathfrak{A}})g_\varphi = \sigma$, was zu zeigen war. Das Modell $\mathcal{E}(\mathcal{M}_2^{\mathfrak{A}})$ ist daher umfassender als jedes $\delta(\mathcal{M}_2^{\mathfrak{A}})$.

Orts- und Impulsoperatoren, sowie Zeit- und Energieoperator sind die gleichen wie in $\mathcal{M}_2^{\mathfrak{A}}$.

9.4 Definition: Es heiße $\mathcal{E}(Q_{2,\nu}^{\mathfrak{A}}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, d(\mathcal{E}(\mathcal{R}_2^{\mathfrak{A}}))(E_\lambda^\nu)$ $(= Q_{2,\nu}^{\mathfrak{A}})$ bzw. $\mathcal{E}(P_{2,\nu}^{\mathfrak{A}}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, d(\mathcal{E}(\mathcal{R}_2^{\mathfrak{A}}))(F_\lambda^\nu)$ $(= P_{2,\nu}^{\mathfrak{A}})$ der Operator der ν-ten Orts- bzw. Impulskoordinate $(\nu = 1, 2, \ldots, f^{\mathfrak{A}} - 1)$, $\mathcal{E}(Q_{2,f^{\mathfrak{A}}}^{\mathfrak{A}}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, d(\mathcal{E}(\mathcal{R}_2^{\mathfrak{A}}))(E_\lambda^{f^{\mathfrak{A}}})$ $(= Q_{2,f^{\mathfrak{A}}}^{\mathfrak{A}})$ der Zeitoperator, $-\mathcal{E}(P_{2,f^{\mathfrak{A}}}^{\mathfrak{A}}) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, d(\mathcal{E}(\mathcal{R}_2^{\mathfrak{A}}))(E_\lambda^{f^{\mathfrak{A}}})$ $(= -P_{2,f^{\mathfrak{A}}}^{\mathfrak{A}})$ der Energieoperator, $\mathcal{E}(H_2^{\mathfrak{A}})$ der Hamiltonoperator und die Gleichung $\mathcal{E}(H_2^{\mathfrak{A}})g = \sigma$ die Schrödingergleichung des Modells $\mathcal{E}(\mathcal{M}$

Die Definition von $\mathcal{E}(\mathcal{M}_2^{\mathfrak{A}})$ wird in § 12, B, verallgemeinert, indem die Voraussetzung, daß $H_2^{\mathfrak{A}}$ hermitesch sein soll, abgeschwächt wird. In § 12, B, wird nur noch gefordert, daß $H_2^{\mathfrak{A}}$ eine Operator-Erweiterung in $\mathcal{L}(\mathcal{H}_2^{\mathfrak{A}})$ (12.2) besitzt.

III. Endgültige Modelle der Quantenmechanik mit Zeitoperator

Hauptergebnis des vorigen Abschnitts sind die Erweiterungen modifizierter üblicher Modelle der Quantenmechanik (§ 9, B). Es sind dies Modelle für physikalische Systeme mit Zeitmessung, also Modelle mit Zeitoperator. Sie enthalten keinen Zeitparameter; die Zeit und die Koordinaten des Ortes werden formal gleich behandelt. Aufgrund ihrer Konstruktion als umfassende Modelle von δ - Bildern können wir annehmen (nach § 8, B und C), daß sie sämtlichen Einwänden gerecht werden, die wir in § 6 gegen die üblichen Modelle erhoben haben (z. B. fehlende Lorentz-Invarianz).

Unsere endgültigen Modelle der Quantenmechanik definieren wir so, daß die Erweiterungen modifizierter üblicher Modelle (9. 3) mit eingeschlossen werden. Die Verallgemeinerung gegenüber 9. 3 wird nur darin bestehen, daß die Form des Hamiltonoperators noch offen bleibt (analog zu den Definitionen 2. 1 und 7. 1). Dann kann die Definition unabhängig von den modifizierten üblichen Ausgangs-Modellen erfolgen. In der Praxis kommen jedoch im allgemeinen nur solche Modelle vor, die zugleich Erweiterungen nach 9. 3 sind. Die endgültigen Modelle wollen wir ohne Zusatz als Modelle der Quantenmechanik mit Zeitoperator bezeichnen.

Das Hauptproblem besteht in der Praxis darin, für ein gegebenes physikalisches System ein sinnvolles Modell mit Zeitoperator zu finden und die Schrödingergleichung des Modells zu lösen.

Die Lösungen der Schrödingergleichung eines Modells mit Zeitoperator sind lineare Funktionale auf einer Operatorenalgebra. Es interessieren jedoch nur solche Lösungen, die positive Funktionale sind. In § 11 befassen wir uns allgemein mit der Konstruktion von positiven Funktionalen.

Um einem physikalischen System einen praktisch brauchbaren Ansatz für ein Modell mit Zeitoperator zuordnen zu können, verallgemeinern wir in § 12 die Konstruktion der Erweiterungen $\mathcal{E}(\mathcal{M}_2^{\mathcal{Y}})$ (§ 9).

In den Paragraphen 13, 14 behandeln wir den wichtigen Problemkreis der Unschärfebeziehungen. Die Heisenbergschen Unschärferelationen können zwar für unsere Modelle mit Zeitoperator auf Energie und Zeit ausgedehnt werden, gelten aber im allgemeinen nicht für alle Zustände des Systems. (Das tritt bei den üblichen Modellen meist nicht in Erscheinung, weil sie im allgemeinen "weniger" Zustände enthalten.) Wir leiten daher allgemeinere Unschärfebeziehungen ab, die für alle Zustände gültig sind. Dabei werden sich auch Bedingungen für die gemeinsame Meßbarkeit von Ort und Impuls sowie von Energie und Zeit ergeben. Es zeigt sich, daß diese Bedingungen z. B. am absoluten Nullpunkt erfüllt sind (§ 15).

Im letzten Paragraphen diskutieren wir eine physikalische Konsequenz der Einführung des Zeitoperators; sie betrifft die Möglichkeit, Materieerzeugung und -vernichtung beschreiben zu können.

§ 10. Definition der Modelle

Unsere endgültigen Modelle der Quantenmechanik mit Zeitoperator erhalten wir durch folgende

10.1 Definition: Sei $\mathcal{Y}$ ein physikalisches System mit Zeitmessung. Die kanonischen Observablen seien: $\{E_\lambda^\nu \mid \lambda \in \mathbb{R}\}, \{F_\lambda^\nu \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, f^{\mathcal{Y}})$

Es sei:

1. $\mathcal{H}^{\mathcal{Y}}$ ein Hilbertraum,
2. $\mathcal{R}^{\mathcal{Y}}$ eine Abbildung von $\mathcal{Y}$ auf die Menge $\mathcal{P}_{\mathcal{H}^{\mathcal{Y}}}$ der Projektions-

operatoren in $\mathcal{H}^{\mathfrak{F}}$, so daß gilt :

a) $\mathcal{R}^{\mathfrak{F}}(\bar{E}) = I_{\mathcal{H}^{\mathfrak{F}}} - \mathcal{R}^{\mathfrak{F}}(E)$ für alle $E \in \mathfrak{F}$.

b) $\mathcal{R}^{\mathfrak{F}}(\sup\{E_1, E_2\}) = \sup\{\mathcal{R}^{\mathfrak{F}}(E_1), \mathcal{R}^{\mathfrak{F}}(E_2)\}$ für alle $E_1, E_2 \in \mathfrak{F}$.

c) Es existiert eine Isometrie $V^{\mathfrak{F}}$ von $\mathcal{H}^{\mathfrak{F}}$ auf $L^2(\mathbb{R}_{f2})$ so, daß $\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, d\mathcal{R}^{\mathfrak{F}}(E^{\nu}_{\lambda}) = (V^{\mathfrak{F}})^{-1}(x_{\nu}) V^{\mathfrak{F}}$ und $\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, d\mathcal{R}^{\mathfrak{F}}(F^{\nu}_{\lambda}) = (V^{\mathfrak{F}})^{-1}\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_{\nu}}\right) V^{\mathfrak{F}}$ für $\nu = 1, 2, \ldots, f$ gilt [1].

3. $H^{\mathfrak{F}}$ ein (nicht notwendig beschränkter) Operator im Banachraum $\mathcal{L}'(\mathcal{H}^{\mathfrak{F}})$, [2]

4. $\mathcal{D}^{\mathfrak{F}}$ die folgende Festsetzung: "Jedes positive[3] Funktional $q \in \mathcal{L}'(\mathcal{H}$ so, daß $H^{\mathfrak{F}} q = \sigma$ und $\| q \| = 1$ gilt, heiße ein Zustand von $\mathfrak{F}$ im Modell $\mathcal{M}^{\mathfrak{F}}$. Für alle $E \in \mathfrak{F}$ sei $\omega_q(E) = q(\mathcal{R}^{\mathfrak{F}}(E))$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine Messung von E im Zustand q das Ergebnis 1 liefert."

Dann heiße das Quadrupel $\mathcal{M}^{\mathfrak{F}} = (\mathcal{H}^{\mathfrak{F}}, \mathcal{R}^{\mathfrak{F}}, H^{\mathfrak{F}}, \mathcal{D}^{\mathfrak{F}})$ ein zu $\mathfrak{F}$ gehöriges Modell der Quantenmechanik mit Zeitoperator.

Aus 9.4 und 7.1 folgt unmittelbar, daß die Erweiterungen modifizierter üblicher Modelle insbesondere auch Modelle im Sinne von 10.1 sind. Sie sind für die Praxis von Bedeutung, weil für sie ein Konstruktionsverfahren existiert: 9.3 in Verbindung mit § 7, B. Dadurch können wir für gegebene Systeme spezielle Modelle mit Zeitoperator konstruieren (Ansätze). Ob diese dann physikalisch sinnvoll sind, kann nur durch Experimente festgestellt werden. Im allgemeinen interessiert man sich nur für den Operator $H^{\mathfrak{F}}$, weil $\mathcal{H}^{\mathfrak{F}}$ und $\mathcal{R}^{\mathfrak{F}}$ durch 2.c meist "ausreichend" festgelegt sind (wie in § 4).

Nach 5.31 und 5.32 existiert zu jedem Zustand q von $\mathfrak{F}$ im Modell $\mathcal{M}^{\mathfrak{F}}$

---

1) Bezeichnungen nach § 2.

2) $\mathcal{L}(\mathcal{H}^{\mathfrak{F}})$ ist die Algebra der beschränkten linearen Operatoren in $\mathcal{H}^{\mathfrak{F}}$ und $\mathcal{L}'(\mathcal{H}^{\mathfrak{F}})$ der Raum der beschränkten linearen Funktionale auf $\mathcal{L}(\mathcal{H}^{\mathfrak{F}})$ (5.11, 5.1'

3) Definition in 5.20

eine Darstellung $\sigma_g : \mathfrak{L}(\mathcal{H}^g) \to \mathfrak{L}(\mathcal{H}^g_{\sigma_g})$ und ein Vektor φ aus dem Darstellungs-Hilbertraum $\mathcal{H}^g_{\sigma_g}$ so, daß $q(A) = (\sigma_g(A)\varphi, \varphi)$ für alle $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{H}^g)$ gilt. Die Wahrscheinlichkeiten in $\mathfrak{D}^g$ haben dann die vom üblichen Modell her geläufige Form. Es ist häufig bequem, eine solche "Hilbertraum-Formulierung" zu wählen.

10.2 Definition: Es heiße $Q^g_\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, d\mathcal{R}^g(E^\nu_\lambda)$ bzw. $P^g_\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, d\mathcal{R}^g(F^\nu_\lambda)$ der Operator der ν-ten Orts- bzw. Impulskoordinate $(\nu = 1, 2, \ldots, f^g - 1)$, $Q^g_{f^g} = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, d\mathcal{R}^g(E^{f^g}_\lambda)$ der Zeitoperator, $-P^g_{f^g} = -\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, d\mathcal{R}^g(F^{f^g}_\lambda)$ der Energieoperator, H^g der Hamiltonoperator und die Gleichung $H^g \varphi = 0$ die Schrödingergleichung des Modells $\mathcal{M}^g$.

Die Abbildung $\mathcal{R}^g$ von $\mathcal{M}^g$ genügt den gleichen Bedingungen wie die Abbildung $\mathcal{R}^g_1$ eines zu g gehörigen üblichen Modells $\mathcal{M}^g_1$ (2.1). Analog zu 2.6 erhalten wir daher folgenden

10.3 Satz: Es gelten für $\mu, \nu = 1, 2, \ldots, f^g$ die Relationen $P^g_\mu Q^g_\nu - Q^g_\nu P^g_\mu = \frac{\hbar}{i} \delta_{\mu\nu} I$, $P^g_\mu P^g_\nu - P^g_\nu P^g_\mu = 0$ und $Q^g_\mu Q^g_\nu - Q^g_\mu Q^g_\nu = 0$. Die Definitionsbereiche der links stehenden Operatoren liegen dicht in $\mathcal{H}^g$.

Insbesondere erhalten wir z. B. für Energie- und Zeitoperator folgende Vertauschungsrelation: $P^g_{f^g} Q^g_{f^g} - Q^g_{f^g} P^g_{f^g} = \frac{\hbar}{i} I_{\mathcal{H}^g}$.

Analog zu 2.9 erfolgt die Definition der Kommensurabilität.

10.4 Definition: Die Eigenschaften $E_1, E_2 \in g$ heißen kommensurabel (gemeinsam meßbar) im Modell $\mathcal{M}^g$, wenn $\mathcal{R}^g(E_1)\mathcal{R}^g(E_2) = \mathcal{R}^g(E_2)\mathcal{R}^g(E_1)$ gilt.

Erwartungswert und Streuung werden analog zu 2.12 definiert.

10.5 Definition: Sei $\{E_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ eine Observable von g und $L = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, d\mathcal{R}^g(E_\lambda)$ der zugehörige hermitesche Operator im Hilbertraum $\mathcal{H}^g$ von $\mathcal{M}^g$.

Sei q ein Zustand von $\mathfrak{Y}$ in $\mathcal{M}^{\mathfrak{Y}}$ so, daß die Integrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, dq(\mathcal{R}^{\mathfrak{Y}}(E_\lambda))$ und $\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 \, dq(\mathcal{R}^{\mathfrak{Y}}(E_\lambda))$ existieren.

Dann heiße $\mu_q(L) = q(L) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, dq(\mathcal{R}^{\mathfrak{Y}}(E_\lambda))$ der Erwartungswert und $s_q(L) = q((L-\mu_q(L))^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda-\mu_q(L))^2 \, dq(\mathcal{R}^{\mathfrak{Y}}(E_\lambda))$ die Streuung von $\{E_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ (oder von L) im Zustand q.

Messung einer Observablen und Meßwert einer Messung wird wie in § 2 definiert.

Definition: Sei $\{E_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ eine Observable von $\mathfrak{Y}$. Eine gemeinsame Messung aller Eigenschaften von $\{E_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ heiße eine Messung [1] von $\{E_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Definition: Sei M eine Messung von $\{E_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ und λ_M eine reelle Zahl, so daß $\lambda_M \leq \lambda$ für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt genau dann, wenn E_λ durch die Messung M bestätigt worden ist. Dann heiße die (eindeutig bestimmte) Zahl λ_M der Meßwert von M.

Die Definition 10. 6 kann ohne weiteres verallgemeinert werden.

Definition: Sei $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{Y}$ eine Menge paarweise kommensurabler Eigenschaften. Eine gemeinsame Messung aller Eigenschaften von $\mathfrak{L}$ heiße eine Messung [1] von $\mathfrak{L}$.

Eine Verallgemeinerung des Begriffes "Meßwert" erfolgt erst in § 14, da sie komplizierter ist und nur dort benötigt wird.

---

[1] Diese Messung ist eine "Idealmessung". Sie wird im allgemeinen in dieser Weise nicht durchgeführt werden können, so daß der Meßwert höchstens näherungsweise feststeht. Davon wollen wir hier absehen.

§ 11. Die Konstruktion positiver Funktionale auf einer Operatorenalgebra.

Sei $\mathfrak{F}$ ein physikalisches System mit Zeitmessung und $\mathcal{M}^{\mathfrak{F}} = (\mathcal{H}^{\mathfrak{F}}, \mathcal{R}^{\mathfrak{F}}, H^{\mathfrak{F}}, \mathcal{D}^{\mathfrak{F}})$ ein dazugehöriges Modell der Quantenmechanik mit Zeitoperator(10.1). Es seien $Q_\nu^{\mathfrak{F}}, P_\nu^{\mathfrak{F}}$ $(\nu = 1,2,\ldots,f^{\mathfrak{F}})$ nach 10.2 die Operatoren des Ortes, der Zeit, des Impulses und der (-1)·(Energie). Wir wollen die Konstruktion positiver auf der Operatorenalgebra $\mathfrak{L}(\mathcal{H}^{\mathfrak{F}})$ definierter Funktionale untersuchen.

Da wir in diesem Paragraphen nur dieses eine Modell $\mathcal{M}^{\mathfrak{F}}$ betrachten, wollen wir den Index $\mathfrak{F}$ weglassen. Wir setzen: $\mathcal{M} = \mathcal{M}^{\mathfrak{F}}$, $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{\mathfrak{F}}$, $\mathcal{R} = \mathcal{R}^{\mathfrak{F}}$, $H = H^{\mathfrak{F}}$, $\mathcal{D} = \mathcal{D}^{\mathfrak{F}}$. Weiter sei: $m = f^{\mathfrak{F}}$ und $Q_\nu = Q_\nu^{\mathfrak{F}}$, $P_\nu = P_\nu^{\mathfrak{F}}$ für $\nu = 1,2,\ldots,m$. Eine Isometrie $V^{\mathfrak{F}}$ nach 10.1, 2.c, werde mit V bezeichnet.

Die Gesamtheit der positiven Funktionale auf $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$ werde mit $\mathfrak{L}_+'(\mathcal{H})$ bezeichnet. Nach 5.21 ist jedes $f \in \mathfrak{L}_+'(\mathcal{H})$ beschränkt; es gilt also $\mathfrak{L}_+'(\mathcal{H}) \subseteq \mathfrak{L}'(\mathcal{H})$.

Jedem $\varphi \in \mathcal{H}$ ist durch $A \to (A\varphi,\varphi)$ ein positives Funktional f_φ auf $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$ zugeordnet(5.30). Die Gesamtheit dieser Funktionale für alle $\varphi \in \mathcal{H}$ werd mit $\mathfrak{F}(\mathcal{H})$ bezeichnet. Es gilt also $\mathfrak{F}(\mathcal{H}) \subseteq \mathfrak{L}_+'(\mathcal{H})$.

Es bezeichne $\mathfrak{L}(\mathfrak{F}(\mathcal{H}))$ die lineare Hülle von $\mathfrak{F}(\mathcal{H})$ in $\mathfrak{L}'(\mathcal{H})$. Dann gilt $\mathfrak{L}(\mathfrak{F}(\mathcal{H})) \subseteq \mathfrak{L}'(\mathcal{H})$, aber $\mathfrak{L}(\mathfrak{F}(\mathcal{H})) \not\subseteq \mathfrak{L}_+'(\mathcal{H})$. Die Funktionale aus $\mathfrak{L}(\mathfrak{F}(\mathcal{H}))$ sind die Linearkombinationen der Elemente von $\mathfrak{F}(\mathcal{H})$ mit komplexen Koeffizienten.

Zwischen den positiven Funktionalen auf $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$ und den Darstellungen von $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$ besteht ein enger Zusammenhang:

Sei σ eine Darstellung von $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$ in $\mathfrak{L}(\mathcal{H}_\sigma)$ mit dem Darstellungs-Hilbertraum $\mathcal{H}_\sigma$. Nach 5.30 ist dann $f_\varphi : A \to (\sigma(A)\varphi,\varphi)$ für jedes

$\varphi \in \mathcal{H}_\delta$ ein positives Funktional auf $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$. Sei f ein positives Funktional auf $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$. Dann existieren nach 5.31 und 5.32 eine Darstellung δ_f: $\mathfrak{L}(\mathcal{H}) \to \mathfrak{L}(\mathcal{H}_{\delta_f})$ und ein Vektor $\varphi \in \mathcal{H}_{\delta_f}$ so, daß $f(A) = (\delta_f(A)\varphi, \varphi)$ für alle $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ gilt. Jedes $f \in \mathfrak{L}_+'(\mathcal{H})$ hat also für eine geeignete Darstellung $\delta_f: \mathfrak{L}(\mathcal{H}) \to \mathfrak{L}(\mathcal{H}_{\delta_f})$ und einen geeigneten Vektor $\varphi \in \mathcal{H}_{\delta_f}$ die Form $f_\varphi : A \to (\delta_f(A)\varphi, \varphi)$. Die positiven Funktionale auf $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$ sind also bekannt, wenn die Darstellungen von $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$ bekannt sind.

Umgekehrt: Sei $f \in \mathfrak{L}_+'(\mathcal{H})$ und δ_f die nach 5.31 konstruierte Darstellung. Jede zyklische Darstellung von $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$ ist nach 5.33 zu einer Darstellung dieser Form äquivalent. Da jede Darstellung von $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$ in eine direkte Summe zyklischer Darstellungen zerlegt werden kann (5.29), sind (bis auf Äquivalenz) alle Darstellungen von $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$ bekannt, wenn die positiven Funktionale auf $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$ bekannt sind.

Das Problem, die positiven Funktionale auf $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$ zu konstruieren, ist also gleichbedeutend damit, die Darstellungen von $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$ zu finden. Das ist ein wichtiges noch ungelöstes Problem aus der Darstellungstheorie symmetrischer Algebren[1]. Bisher sind lediglich spezielle Darstellungen bekannt. Entsprechend ungelöst ist also auch das Problem der Konstruktion sämtlicher positiver Funktionale auf $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$.

Wir wollen uns im folgenden mit einer Methode befassen, die es erlaubt, eine für die Anwendung wichtige Klasse positiver Funktionale auf $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$ in einer Weise zu konstruieren, die der Praxis angepaßt ist.

---

1) Vergl. [7, S. 303]

A. Approximation positiver Funktionale durch Elemente von $\mathfrak{L}(\mathfrak{F}(\mathfrak{H}))$

Um Elemente von $\mathfrak{L}'_+(\mathfrak{H})$ konstruieren zu können, ist es naheliegend zu versuchen, sie mit Hilfe von $\mathfrak{L}(\mathfrak{F}(\mathfrak{H}))$ auszudrücken. Diesem Zweck dient der folgende

11.1 Satz: Sei $f \in \mathfrak{L}'_+(\mathfrak{H})$. Dann existiert eine Filterbasis [1] $\mathfrak{O}_f$ auf $\mathfrak{L}(\mathfrak{F}(\mathfrak{H}))$ so, daß bezüglich der schwachen Topologie [2] $f = \lim \mathfrak{O}_f$ gilt.

Beweis: Eine Filterbasis der geforderten Art erhalten wir folgendermaßen: Sei $\mathfrak{U}$ eine Umgebungsbasis von f in der schwachen Topologie von $\mathfrak{L}'(\mathfrak{H})$. Dann ist $\mathfrak{O}_f = \{U \cap \mathfrak{L}(\mathfrak{F}(\mathfrak{H})) \mid U \in \mathfrak{U}\}$ eine Filterbasis auf $\mathfrak{L}(\mathfrak{F}(\mathfrak{H}))$ mit den gewünschten Eigenschaften.

Um das zu zeigen, genügt der Nachweis, daß $U \cap \mathfrak{L}(\mathfrak{F}(\mathfrak{H})) \neq \emptyset$ für jedes $U \in \mathfrak{U}$ gilt. Dann ist $\mathfrak{O}_f$ eine Filterbasis und die Beziehung $f = \lim \mathfrak{O}_f$ folgt unmittelbar aus der Definition der Filterbasiskonvergenz (5.38).

Sei $U \in \mathfrak{U}$ beliebig gewählt. Dann umfaßt U ein Element der in 5.18, b, angegebenen Filterbasis, d.h. es existieren ein $\varepsilon > 0$ und Elemente $A_1, \ldots, A_m$ von $\mathfrak{L}(\mathfrak{H})$ so, daß $U_{\varepsilon, A_1, \ldots, A_m}(f) = \{\tilde{f} \in \mathfrak{L}'(\mathfrak{H}) \mid |f(A_\nu) - \tilde{f}(A_\nu)| < \varepsilon, \nu = 1, 2, \ldots, m\} \subseteq U$ gilt. Wir wollen nun ein Element $g \in U_{\varepsilon, A_1, \ldots, A_m}(f) \cap \mathfrak{L}(\mathfrak{F}(\mathfrak{H}))$ angeben. Dann ist $U \cap \mathfrak{L}(\mathfrak{F}(\mathfrak{H})) \neq \emptyset$ und der Satz ist bewiesen.

Zu diesem Zweck gehen wir zur Matrixdarstellung $(\alpha_{\ell\kappa}^{(\nu)})$ $(\ell, \kappa = 1, 2, \ldots; \alpha_{\ell\kappa}^{(\nu)} \in \mathbb{C}$ der Elemente $A_1, \ldots, A_m \in \mathfrak{L}(\mathfrak{H})$ bezüglich einer Basis $\{h_\ell \in \mathfrak{H} \mid \ell = 1, 2, \ldots$ über. (Wegen 10.1, 2.c, ist $\mathfrak{H}$ separabel; es existiert also eine solche Basis.) Der von den Elementen $A_1, \ldots, A_m$ aufgespannte Teilraum von $\mathfrak{L}(\mathfrak{H})$ habe die Dimension $r \leq m$. Für jedes Indexpaar $\ell\kappa$ betrachten wir das m-tupel $(\alpha_{\ell\kappa}^{(1)}, \ldots, \alpha_{\ell\kappa}^{(m)})$. Alle diese m-tupel denken wir uns in irgendeiner Reihenfolge untereinandergeschrieben. Dadurch erhalten wir

---

1) Definition in 5.35 2) Definition in 5.18, b 3) Definition in 5.39

eine Matrix mit m Spalten und unendlich vielen Zeilen. Die Spalten spannen einen r-dimensionalen Raum auf. Wir können annehmen, daß die ersten r Spalten linear unabhängig sind. Die Transformation auf eine kanonische Basis des von den ersten r Spalten aufgespannten Raumes zeigt, daß r Zeilen, etwa zu den Indexpaaren $l_1 k_1, \dots, l_r k_r$ so existieren, daß die Matrix $(\alpha^{(\nu)}_{l_\mu k_\mu})$ $(\mu, \nu = 1, \dots, r)$ den Rang r hat. Daher ist das folgende Gleichungssystem in $\mathbb{C}$ eindeutig lösbar:

$$\begin{aligned} f(A_1) &= \alpha^{(1)}_{l_1 k_1} x_1 + \alpha^{(1)}_{l_2 k_2} x_2 + \dots + \alpha^{(1)}_{l_r k_r} x_r \\ &\vdots \\ f(A_r) &= \alpha^{(r)}_{l_1 k_1} x_1 + \alpha^{(r)}_{l_2 k_2} x_2 + \dots + \alpha^{(r)}_{l_r k_r} x_r \end{aligned}$$

Die Lösung sei $(x_1, x_2, \dots, x_r)$, $x_\nu \in \mathbb{C}$ $(\nu = 1, \dots, r)$.

Wir definieren folgendermaßen ein lineares Funktional g über $\mathfrak{L}(\mathfrak{H})$: Für alle $\mathcal{B} \in \mathfrak{L}(\mathfrak{H})$ ((β_{ik}) die Matrixdarstellung von B) sei $g(\mathcal{B}) = \beta_{l_1 k_1} x_1 + \beta_{l_2 k_2} x_2 + \dots + \beta_{l_r k_r} x_r$.

Nach Konstruktion von x_ν $(\nu = 1, \dots, r)$ gilt dann $g(A_\nu) = f(A_\nu)$ $(\nu = 1, \dots, r)$. Die Elemente $A_{r+1}, \dots, A_m$ sind von $A_1, \dots, A_r$ abhängig, g und f sind linear; es gilt also $g(A_\nu) = f(A_\nu)$ für $\nu = 1, 2, \dots, m$. Daraus folgt, daß $g \in \mathcal{U}_{\varepsilon, A_1, \dots, A_m}(f)$ gilt.

Es bleibt noch zu beweisen, daß g in $\mathfrak{L}(\mathfrak{F}(\mathfrak{H}))$ liegt. Aus den Basiselementen $h_1, h_2, \dots$ von $\mathfrak{H}$ kombinieren wir die Elemente $k^1_\mu = h_{l_\mu} + i h_{k_\mu}$, $k^2_\mu = h_{l_\mu} + h_{k_\mu}$, $k^3_\mu = h_{l_\mu}$, $k^4_\mu = h_{k_\mu}$ $(\mu = 1, \dots, r)$. Die zugehörigen Funktionale aus $\mathfrak{F}(\mathfrak{H})$ seien $f_{k^1_\mu}, f_{k^2_\mu}, f_{k^3_\mu}, f_{k^4_\mu}$ $(\mu = 1, \dots, r)$. Es gilt $f_{k^\nu_\mu}(\mathcal{B}) = (\mathcal{B} k^\nu_\mu, k^\nu_\mu)$ für alle $\mathcal{B} \in \mathfrak{L}(\mathfrak{H})$, $\nu = 1, \dots, 4$ und $\mu = 1, 2, \dots, r$. Die Rechnung ergibt: $(\mathcal{B} k^1_\mu, k^1_\mu) = \beta_{l_\mu l_\mu} + i\beta_{l_\mu k_\mu} - i\beta_{k_\mu l_\mu} + \beta_{k_\mu k_\mu}$, $(\mathcal{B} k^2_\mu, k^2_\mu) = \beta_{l_\mu l_\mu} + \beta_{l_\mu k_\mu} + \beta_{k_\mu l_\mu} + \beta_{k_\mu k_\mu}$, $(\mathcal{B} k^3_\mu, k^3_\mu) = \beta_{l_\mu l_\mu}$, $(\mathcal{B} k^4_\mu, k^4_\mu) = \beta_{k_\mu k_\mu}$. Daraus erhalten wir: $\beta_{l_\mu k_\mu} x_\mu = \left(-\frac{i}{2}(\mathcal{B} k^1_\mu, k^1_\mu) + \frac{1}{2}(\mathcal{B} k^2_\mu, k^2_\mu) + \frac{1}{2}(i-1)(\mathcal{B} k^3_\mu, k^3_\mu) + \frac{1}{2}(i-1)(\mathcal{B} k^4_\mu, k^4_\mu)\right) x_\mu$ (für alle $\mathcal{B} \in \mathfrak{L}(\mathfrak{H})$ und für $\mu = 1, \dots, r$. Es folgt: $g(\mathcal{B}) = \left(\sum_{\mu=1}^{r} x_\mu \left(-\frac{i}{2} f_{k^1_\mu} + \frac{1}{2} f_{k^2_\mu} + \frac{1}{2}(i-1) f_{k^3_\mu} + \frac{1}{2}(i-1) f_{k^4_\mu}\right)\right)(\mathcal{B})$ (für alle $\mathcal{B} \in \mathfrak{L}(\mathfrak{H})$). Es ist also g eine Linearkombination von Elementen aus $\mathfrak{F}(\mathfrak{H})$. Daher gilt: $g \in \mathfrak{L}(\mathfrak{F}(\mathfrak{H}))$.

Damit haben wir gezeigt, daß $\varphi \in U_{\varepsilon, A_1, \ldots, A_n} \cap \mathcal{L}(\mathcal{F}(\mathcal{H}))$ gilt. Dieser Durchschnitt ist nicht leer, Satz 11.1 ist bewiesen.

Satz 11.1 zeigt, daß jedes positive Funktional auf $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ durch eine Filterbasis auf $\mathcal{L}(\mathcal{F}(\mathcal{H}))$ approximiert werden kann. Das Problem, alle positiven Funktionale auf $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ zu konstruieren, ist also dann gelöst, wenn alle Filterbasen auf $\mathcal{L}(\mathcal{F}(\mathcal{H}))$ bekannt sind, die einen schwachen[1] Limes in $\mathcal{L}'_+(\mathcal{H})$ besitzen. Es ist jedoch nicht zu sehen, wie man alle Filterbasen dieser Art finden kann. Eine umfangreiche und für die Anwendung wichtige Klasse solcher Filterbasen wird uns im folgenden beschäftige

B. Eine Klasse positiver Funktionale auf $\mathcal{L}(\mathcal{H})$

Es gilt der folgende

11.2 Satz: Sei $\mathfrak{O}$ eine Filterbasis auf $\mathcal{F}(\mathcal{H})$, deren Elemente Teilmengen ei schwach kompakten Menge $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{L}'(\mathcal{H})$ sind. Es bezeichne $[\mathfrak{O}]$ die Menge der schwachen Häufungspunkte von $\mathfrak{O}$ in $\mathcal{L}'(\mathcal{H})$. Dann gilt:

1. $[\mathfrak{O}] \neq \emptyset$.
2. $[\mathfrak{O}] \subseteq \mathcal{L}'_+(\mathcal{H})$.
3. Zu jedem $f \in [\mathfrak{O}]$ existiert eine Filterbasis $\mathfrak{O}_f$ auf $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ so, daß bezüglich der schwachen Topologie $f = \lim \mathfrak{O}_f$ gilt.

Beweis: 1. Jeder Filter auf einer kompakten Menge besitzt mindestens einen Häufungspunkt ([11, S. 59, Satz I]). Für eine Filterbasis gilt nach 5.40 das gleiche. $\mathfrak{O}$ ist insbesondere eine Filterbasis auf $\mathcal{K}$. Es ist daher $[\mathfrak{O}] \neq \emptyset$. 2. Es ist nach 5.20 zu zeigen, daß $f(A^*A) \geq 0$ für alle $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ gilt. (A^* ist dabei der zu A adjungierte Operator.) Sei $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Für jedes $G \in \mathfrak{O}$ werde gesetzt: $G(A^*A) = \{g(A^*A) \mid g \in G\}$

---

[1] Der Zusatz "schwach" bedeutet nach 5.18, b, "in der schwachen Topologie von $\mathcal{L}'(\mathcal{H})$".

Dann ist $f(A^*A)$ Häufungspunkt der auf $\mathbb{C}$ gegebenen Filterbasis $\mathfrak{O}_f(A^*A) = \{G(A^*A) \mid G \in \mathfrak{O}_f\}$ (5.42). Da $\mathfrak{O}_f$ eine Filterbasis auf $\mathfrak{F}(\mathcal{H})$ ist, gilt $G \subseteq \mathfrak{F}(\mathcal{H}) \subseteq \mathfrak{L}'_+(\mathcal{H})$ für jedes $G \in \mathfrak{O}_f$. Daher ist $g(A^*A) \geq \sigma$ für jedes $g \in G$. Die Elemente von $\mathfrak{O}_f(A^*A)$ sind Teilmengen von $[\sigma, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \sigma\}$. Jeder Häufungspunkt von $\mathfrak{O}_f(A^*A)$ ist Häufungspunkt von $[\sigma, \infty)$ im üblichen Sinn und liegt daher in $[\sigma, \infty)$. Es folgt $f(A^*A) \geq \sigma$, was zu zeigen war.

3. Sei $f \in [\mathfrak{O}_f]$ und $\mathfrak{U}$ eine Umgebungsbasis von f in $\mathfrak{L}'(\mathcal{H})$ bezüglich der schwachen Topologie. Dann ist $U \cap G \neq \emptyset$ für alle $U \in \mathfrak{U}$ und alle $G \in \mathfrak{O}_f$ (5.40). Daher ist $\mathfrak{O}_f = \{U \cap G \mid U \in \mathfrak{U}, G \in \mathfrak{O}_f\}$ eine Filterbasis auf $\mathfrak{F}(\mathcal{H})$. Jedes $U \in \mathfrak{U}$ umfaßt ein $G \in \mathfrak{O}_f$. Es gilt also $f = \lim \mathfrak{O}_f$. Damit ist Satz 11.2 bewiesen.

Beispiele für Filterbasen, die der Voraussetzung von 11.2 genügen: Im Hilbertraum $\mathcal{H}$ sei eine Folge $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ gegeben so, daß $\|\varphi_\nu\| \leq L$ $(\sigma < L \in \mathbb{R}, \nu = 1, 2, \ldots)$ gilt. Für die zugehörigen Funktionale $f_{\varphi_1}, f_{\varphi_2}, \ldots$ von $\mathfrak{F}(\mathcal{H})$ erhalten wir die Abschätzung: $|f_{\varphi_\nu}(A)| = |(A\varphi_\nu, \varphi_\nu)| \leq \|A\| \|\varphi_\nu\|^2$ für alle $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ und $\nu = 1, 2, \ldots$. Es folgt: $\|f_{\varphi_\nu}\| \leq L^2$ für $\nu = 1, 2, \ldots$. Wir setzen $F_\nu = \{f_{\varphi_\mu} \mid \mu \geq \nu\}$. Dann ist $\mathfrak{F} = \{F_\nu \mid \nu = 1, 2, \ldots\}$ eine Filterbasis auf $\mathfrak{F}(\mathcal{H}) \cap \{g \in \mathfrak{L}'(\mathcal{H}) \mid \|g\| \leq L^2\} = \mathfrak{F}(\mathcal{H}) \cap \mathfrak{U}_{L^2}$. Die Kugel $\mathfrak{U}_{L^2}$ ist nach 5.19 schwach kompakt.

Die Vereinigung der Mengen $[\mathfrak{O}_f]$ für alle Filterbasen $\mathfrak{O}_f$ nach Satz 11.2 ergibt eine Klasse positiver Funktionale auf $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$, die für die Anwendung von Bedeutung ist. Zunächst soll die Konstruktion dieser Funktionale untersucht werden.

C. Konstruktionsverfahren und physikalische Bedeutung.

Sei $\mathfrak{O}_f$ eine Filterbasis nach 11.2 und $[\mathfrak{O}_f]$ die zugehörige (nichtleere) Menge der schwachen Häufungspunkte von $\mathfrak{O}_f$. Gesucht seien die Funktionswerte $f(A)$ der Funktionale $f \in [\mathfrak{O}_f]$ für $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$.

Sei $A_1 \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$. Für jedes $G \in \mathfrak{G}$ sei $G(A_1) = \{g(A_1) \mid g \in G\}$. Wegen $[\mathfrak{G}] \neq \emptyset$ hat dann die auf $\mathbb{C}$ gegebene Filterbasis $\mathfrak{G}(A_1) = \{G(A_1) \mid G \in \mathfrak{G}\}$ mindestens einen Häufungspunkt (5. 42). Wir wählen einen aus und bezeichnen ihn mit $f(A_1)$. Für jedes $\varepsilon > \sigma$ sei: $U_{\varepsilon, A_1} = \{g \in \mathfrak{B}'(\mathcal{H}) \mid |g(A_1) - f(A_1)| < \varepsilon\}$. Nach Konstruktion von $f(A_1)$ gilt dann $G \cap U_{\varepsilon, A_1} \neq \emptyset$ für alle $G \in \mathfrak{G}$ und alle $\varepsilon > \sigma$. Daher ist $\mathfrak{G}_{A_1} = \{G \cap U_{\varepsilon, A_1} \mid \sigma < \varepsilon \in \mathbb{R}, G \in \mathfrak{G}\}$ eine Filterbasis auf $\mathfrak{F}(\mathcal{H})$. Sie genügt der Voraussetzung von 11. 2, da jedes Element von $\mathfrak{G}_{A_1}$ Teilmenge eines Elements von $\mathfrak{G}$ ist.

Sei $A_2 \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ und $A_2 \neq A_1$. Mit $\mathfrak{G}_{A_1}$ statt $\mathfrak{G}$ und A_2 statt A_1 wiederholen wir die eben durchgeführte Konstruktion: Für jedes $G \in \mathfrak{G}_{A_1}$ sei $G(A_2) = \{g(A_2) \mid g \in G\}$. Ein Häufungspunkt der auf $\mathbb{C}$ gegebenen Filterbasis $\mathfrak{G}_{A_1}(A_2)$ $\{G(A_2) \mid G \in \mathfrak{G}_{A_1}\}$ werde mit $f(A_2)$ bezeichnet. Für jedes $\varepsilon > \sigma$ sei: $U_{\varepsilon, A_2} = \{g \in \mathfrak{B}'(\mathcal{H}) \mid |g(A_2) - f(A_2)| < \varepsilon\}$. Dann ist $\mathfrak{G}_{A_1, A_2} = \{G \cap U_{\varepsilon, A_2} \mid \sigma < \varepsilon \in \mathbb{R}, G \in \mathfrak{G}_{A_1}\}$ eine Filterbasis auf $\mathfrak{F}(\mathcal{H})$, die der Voraussetzung von 11. 2 genügt.

Sei $A_\nu \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ für $\nu = 3, 4, \ldots, m$ und $A_\nu \neq A_\mu$ für $\mu \neq \nu$. In der oben angegebenen Weise fortfahrend erhalten wir dann die komplexen Werte $f(A_\nu)$ für $\nu = 3, 4, \ldots, m$ und eine Filterbasis $\mathfrak{G}_{A_1, A_2, \ldots, A_m}$ auf $\mathfrak{F}(\mathcal{H})$ die der Voraussetzung von 11. 2 genügt. Insbesondere gilt daher $[\mathfrak{G}_{A_1, \ldots, A_m}] \neq$ Da jedes Element von $\mathfrak{G}$ Obermenge mindestens eines Elementes von $\mathfrak{G}_{A_1, \ldots, A_m}$ ist, gilt: $[\mathfrak{G}_{A_1, \ldots, A_m}] \subseteq [\mathfrak{G}]$.

Wir setzen $G(A_\nu) = \{g(A_\nu) \mid g \in G\}$ für alle $G \in \mathfrak{G}_{A_1, \ldots, A_m}$ und $\mathfrak{G}_{A_1, \ldots, A_m}(A_\nu$ $\{G(A_\nu) \mid G \in \mathfrak{G}_{A_1, \ldots, A_m}\}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, m)$. Jedes Element von $\mathfrak{G}_{A_1, \ldots, A_m}$ hat die Form $G \cap U_{\varepsilon_1, A_1} \cap \cdots \cap U_{\varepsilon_m, A_m}$ mit $U_{\varepsilon_\nu, A_\nu} = \{g \in \mathfrak{B}'(\mathcal{H}) \mid |g(A_\nu) - f(A_\nu)| < \varepsilon_\nu\}$ $(\varepsilon_\nu > \sigma, \nu = 1, 2, \ldots, m)$ und $G \in \mathfrak{G}$. Daraus folgt, daß $\mathfrak{G}_{A_1, \ldots, A_m}(A_\nu$ auf $\mathbb{C}$ für $\nu = 1, 2, \ldots, m$ gegen $f(A_\nu)$ konvergiert.

Daher nimmt jedes Funktional aus $[\mathfrak{G}_{A_1, \ldots, A_m}]$ an den Stellen $A_1, A_2, \ldots, A_m$ die Werte $f(A_1), \ldots, f(A_m)$ an.

Für alle Auswahlmöglichkeiten der Werte $f(A_1), \ldots, f(A_m)$ erhalten wir die Funktionswerte sämtlicher Funktionale aus $[\mathfrak{H}]$ an den Stellen $A_1, \ldots, A_m$. Das Verfahren kann beliebig fortgesetzt werden.

Wir können nach dieser Methode für jedes $f \in [\mathfrak{H}]$ und jede endliche Anzahl von Elementen $A_1, A_2, \ldots, A_m$ aus $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$ die zugehörigen Funktionswerte $f(A_1), f(A_2), \ldots, f(A_m)$ konstruieren.

Das hier angegebene Verfahren wollen wir nun physikalisch interpretieren.

In der Praxis sind nur die Funktionswerte positiver Funktionale für hermitesche Operatoren aus $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$ von Interesse. Sei etwa $f \in \mathfrak{L}_+'(\mathcal{H})$ ein Zustand von $\mathfrak{F}$ im Modell $\mathcal{M}$, $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ ein hermitescher Operator und $\{E_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ eine Observable von $\mathfrak{F}$ so, daß $A = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, dR(E_\lambda)$ gilt. Dann ist nach 10.5 $f(A)$ der Erwartungswert von $\{E_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ bei einer Messung dieser Observablen im Zustand f. Jede solche Messung liefert eine reelle Zahl als Meßwert. Den Mittelwert einer Reihe derartiger Meßwerte bezeichnen wir mit $M(A)$. Die mathematische Erwartung $f(A)$ kann dann mit dem experimentell erhaltenen Mittelwert $M(A)$ verglichen werden.

Für $\nu = 1, 2, \ldots, m$ sei $A_\nu \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ ein hermitescher Operator, $\{E_{\nu,\lambda} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ eine Observable von $\mathfrak{F}$ so, daß $A_\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, dR(E_{\nu,\lambda})$ gilt und $M(A_\nu)$ der Mittelwert einer Reihe von Meßwerten, die durch Messung der Observablen $\{E_{\nu,\lambda} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ erhalten wurden. Wenn $\mathcal{M}$ ein physikalisch sinnvolles Modell ist, so existiert ein Zustand f von $\mathfrak{F}$ in $\mathcal{M}$ so, daß $f(A_\nu) = M(A_\nu)$ für $\nu = 1, 2, \ldots, m$ gilt. (Natürlich wird im allgemeinen höchstens eine näherungsweise Übereinstimmung möglich sein: $f(A_\nu) \sim M(A_\nu)$, $\nu = 1, \ldots, m$.)

Auf diese Weise kann experimentell geprüft werden, ob $\mathcal{M}$ physikalisch sinnvoll ist und mit der Erfahrung übereinstimmt. (Vergleich des mathematischen Modells mit der experimentell gegebenen Erfahrung.)

Es können durch Experimente nur endlich viele Observable von $\mathcal{H}$ gemessen werden, so daß höchstens endlich viele Mittelwerte der Form $M($ vorliegen. Um das Modell mit der Erfahrung zu vergleichen, werden dahe ebenfalls höchstens endlich viele Funktionswerte $f(A)$ positiver Funktionale benötigt. Das oben angegebene Verfahren der "punktweisen" Konstruktion positiver Funktionale ist also den experimentellen Erfordernisse genau angepaßt. Es brauchen nur solche Funktionswerte konstruiert zu werden, die man tatsächlich benötigt. Die Konstruktion des "ganzen" Funktionals erspart man sich. Jederzeit können neue Meßreihen in Betracht gezogen werden, indem man weitere Funktionswerte konstruiert. Dieser Vorgang kann beliebig fortgesetzt werden. Darin besteht der Vorteil der behandelten Konstruktionsmethode.

D. Konstruktion von Fortsetzungen positiver Funktionale.

Wir wollen uns nun mit speziellen Filterbasen der Art (11.2) befassen und sie zur Konstruktion von Fortsetzungen verwenden. Es sollen Fortsetzung positiver Funktionale über kommutativen Teilalgebren von $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$ auf ganz $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$ untersucht werden. Dazu beweisen wir den folgenden

11.3 Satz: Sei $\mathcal{A}$ eine kommutative und bezüglich der Adjungiertenbildung symmetrische Teilalgebra von $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$, die bezüglich der Norm von $\mathfrak{L}($ vollständig ist und das Einselement $I_{\mathcal{H}}$ von $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$ enthält. Es sei a ein positives Funktional über $\mathcal{A}$ und $\mathfrak{V}_a$ die Gesamtheit der Mengen $\mathfrak{V}_{\varepsilon, A_1, \ldots, A_m} = \{g \in \mathfrak{F}(\mathcal{H}) \mid \|g\| = a(I_{\mathcal{H}}), |g(A_\nu) - a(A_\nu)| < \varepsilon, \nu = 1, 2, \ldots, m$ für alle $\varepsilon > 0$ und alle endlich vielen Elemente $A_1, \ldots, A_m$ von $\mathcal{A}$

Dann ist $\mathfrak{V}_a$ eine Filterbasis auf $\mathfrak{F}(\mathcal{H})$, die der Voraussetzung v Satz 11.2 genügt und jedes $f \in [\mathfrak{V}_a]$ $(\neq \phi)$ ist eine Fortsetzung von auf ganz $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$; d.h. es gilt $f(A) = a(A)$ für alle $A \in \mathcal{A}$ und alle $f \in [\mathfrak{V}_a]$.

Beweis: Wir zeigen zunächst, daß $\mathfrak{V}_a$ eine Filterbasis auf $\mathfrak{F}(\mathfrak{H})$ ist.

Sei $\mathfrak{V}_{\varepsilon,A_1,\dots,A_m}, \mathfrak{V}_{\varepsilon',A'_1,\dots,A'_{m'}} \in \mathfrak{V}_a$. Der Durchschnitt $\mathfrak{V}_{\varepsilon,A_1,\dots,A_m} \cap \mathfrak{V}_{\varepsilon',A'_1,\dots,A'_{m'}}$ umfaßt die Menge $\mathfrak{V}_{\varepsilon'',A_1,\dots,A_m,A'_1,\dots,A'_{m'}} \in \mathfrak{V}_a$ für $\varepsilon'' = \min\{\varepsilon,\varepsilon'\}$. Daher ist $\mathfrak{V}_a$ dann eine Filterbasis auf $\mathfrak{F}(\mathfrak{H})$, wenn $\mathfrak{V}_a$ die leere Menge nicht enthält.

Sei $\mathfrak{V}_{\varepsilon,A_1,\dots,A_m} \in \mathfrak{V}_a$. Wir wollen beweisen, daß $\mathfrak{V}_{\varepsilon,A_1,\dots,A_m} \neq \emptyset$ gilt. Die Algebra $\mathfrak{A}$ erfüllt die Voraussetzungen von [7, S. 260, Satz III]. Daher kann A_ν für $\nu = 1,2,\dots,m$ in folgender Form geschrieben werden:

$$A_\nu = \int_{M_\mathfrak{A}} F_{A_\nu}(\gamma)\, d\,S(\gamma) \qquad (\gamma \in M_\mathfrak{A}).$$

Dabei ist $M_\mathfrak{A}$ der Raum der maximalen Ideale von $\mathfrak{A}$. Nach [7, S. 203, 14. Zeile von unten] ist jedes Element der Restklassenalgebra von $\mathfrak{A}$ nach $\gamma \in M_\mathfrak{A}$ ein Vielfaches des Einselements. Es existiert daher zu jedem $A \in \mathfrak{A}$ und jedem $\gamma \in M_\mathfrak{A}$ eine komplexe Zahl $F_A(\gamma)$ so, daß $A + \gamma = F_A(\gamma) I_\mathfrak{H} + \gamma$ gilt. Jedem $A \in \mathfrak{A}$ ist dadurch die Abbildung $F_A : \gamma \longrightarrow F_A(\gamma)$ von $M_\mathfrak{A}$ in $\mathbb{C}$ zugeordnet.

S bedeutet ein Spektralmaß auf $M_\mathfrak{A}$, d.h. eine Funktion, die jeder Borelschen Menge $\Delta \subseteq M_\mathfrak{A}$ einen Projektionsoperator $S(\Delta)$ von $\mathfrak{H}$ zuordnet, so daß bestimmte Bedingungen erfüllt sind ([7, S. 258]).

Nach [7, S. 259, Formel (3)] kann zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Integralsumme der Form $\sum_{\ell=1}^{k_\nu} F_{A_\nu}(\gamma_{\ell,\nu})\, S(\Delta_{\ell,\nu})$ mit $\bigcup_{\ell=1}^{k_\nu} \Delta_{\ell,\nu} = M_\mathfrak{A}$ und $\gamma_{\ell,\nu} \in \Delta_{\ell,\nu}$ gewählt werden, so daß gilt:

$$\| A_\nu - \sum_{\ell=1}^{k_\nu} F_{A_\nu}(\gamma_{\ell,\nu})\, S(\Delta_{\ell,\nu}) \| \leq \frac{\varepsilon}{2\|a\|} \quad (\nu = 1,2,\dots,m).$$ Dabei ist $\|a\| = a(I_\mathfrak{H})$ die Norm von a (5.21).

Für das Funktional a gilt dann folgende Abschätzung:

$$|a(A_\nu) - \sum_{\ell=1}^{k_\nu} F_{A_\nu}(\gamma_{\ell,\nu})\, a(S(\Delta_{\ell,\nu}))| = |a(A_\nu - \sum_{\ell=1}^{k_\nu} F_{A_\nu}(\gamma_{\ell,\nu})\, S(\Delta_{\ell,\nu}))| \leq$$
$$\|a\| \, \| A_\nu - \sum_{\ell=1}^{k_\nu} F_{A_\nu}(\gamma_{\ell,\nu})\, S(\Delta_{\ell,\nu}) \| \leq \|a\| \cdot \frac{\varepsilon}{2\|a\|} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Zu jedem $\nu = 1,2,\dots,m$ haben wir eine Zerlegung $\bigcup_{\ell=1}^{k_\nu} \Delta_{\ell,\nu}$ der Menge M_α in k_ν Borelsche Mengen $\Delta_{\ell,\nu}$ $(\ell = 1,2,\dots,k_\nu)$. Wir wählen eine Zerlegung $\bigcup_{\ell=1}^{\tilde{k}} \tilde{\Delta}_\ell = M_\alpha$, die feiner als jede dieser Zerlegungen ist: $\tilde{\Delta}_\ell$ sei für jedes ν in einer der Mengen $\Delta_{\ell,\nu}$ $(\ell = 1,\dots,k_\nu)$ enthalten. Dann gilt mit $\tilde{\gamma}_\ell \in \tilde{\Delta}_\ell$ $(\ell = 1,2,\dots,\tilde{k})$ folgende Abschätzung:

$$\| A_\nu - \sum_{\ell=1}^{\tilde{k}} F_{A_\nu}(\tilde{\gamma}_\ell)\, S(\tilde{\Delta}_\ell) \| \leq \frac{\varepsilon}{2\|a\|} .$$

Es folgt: $$\left| a(A_\nu) - \sum_{\ell=1}^{\tilde{k}} F_{A_\nu}(\tilde{\gamma}_\ell)\, a(S(\tilde{\Delta}_\ell)) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (\nu = 1,2,\dots,m).$$

Sei $\mathcal{H}_\ell$ der Teilraum von $\mathcal{H}$, auf den $S(\tilde{\Delta}_\ell)$ projiziert $(\ell = 1,2,\dots,\tilde{k})$. Wenn $a(S(\tilde{\Delta}_\ell)) \neq \mathcal{O}$ ist, so ist $S(\tilde{\Delta}_\ell)$ vom Nulloperator und $\mathcal{H}_\ell$ vom Nullraum verschieden. Für jedes $\ell \in \{1,\dots,\tilde{k}\}$, für das $a(S(\tilde{\Delta}_\ell)) \neq \mathcal{O}$ ist, wählen wir ein Element $h_\ell \in \mathcal{H}_\ell$ mit $h_\ell \neq \mathcal{O}$; für jeden übrigen Wert ℓ sei $h_\ell = \mathcal{O}$. Wir setzen $h = \sum_{\ell=1}^{\tilde{k}} h_\ell$. Nach [7, S. 258, (1)] gilt $S(\tilde{\Delta}_\ell) \cdot S(\tilde{\Delta}_{\ell'}) = \mathcal{O}$ für $\ell \neq \ell'$. Daraus folgt, daß $(h_\ell, h_{\ell'}) = \mathcal{O}$ für $\ell \neq \ell'$ gilt. Also erhalten wir $(h,h) = \sum_{\ell=1}^{\tilde{k}} (h_\ell, h_\ell)$. Da a positiv ist, gilt $a(S(\tilde{\Delta}_\ell)) \geq \mathcal{O}$. Daher können wir h_ℓ so normieren, daß $(h_\ell, h_\ell) = a(S(\tilde{\Delta}_\ell))$ gilt.

Sei f_h das zu h gehörige Element aus $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$. Nach 5.21 gilt $\| f_h \| = f_h(I_{\mathcal{H}})$. Es folgt: $\| f_h \| = f_h(I_{\mathcal{H}}) = (I_{\mathcal{H}} h, h) = (h,h) = \sum_{\ell=1}^{\tilde{k}} (h_\ell, h_\ell) = \sum_{\ell=1}^{\tilde{k}} a(S(\tilde{\Delta}_\ell)) = a\left(\sum_{\ell=1}^{\tilde{k}} S(\tilde{\Delta}_\ell)\right) = a(I_{\mathcal{H}}) = \|a\|$. Wegen $\| A_\nu - \sum_{\ell=1}^{\tilde{k}} F_{A_\nu}(\tilde{\gamma}_\ell) S(\tilde{\Delta}_\ell) \| \leq$

$\leq \frac{\varepsilon}{2\|a\|}$ erhalten wir dann die Abschätzung:

$$\left| f_h(A_\nu) - \sum_{\ell=1}^{\tilde{k}} F_{A_\nu}(\tilde{\gamma}_\ell) f_h(S(\tilde{\Delta}_\ell)) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (\nu = 1,2,\dots,m).$$

Mit $f_h(S(\tilde{\Delta}_\ell)) = (S(\tilde{\Delta}_\ell) h, h) = (h_\ell, h_\ell) = a(S(\tilde{\Delta}_\ell))$ folgt:

$$\left| a(A_\nu) - f_h(A_\nu) \right| = \left| a(A_\nu) - \sum_{\ell=1}^{\tilde{k}} F_{A_\nu}(\tilde{\gamma}_\ell)\, a(S(\tilde{\Delta}_\ell)) + \sum_{\ell=1}^{\tilde{k}} F_{A_\nu}(\tilde{\gamma}_\ell)\, a(S(\tilde{\Delta}_\ell)) - f_h(A_\nu) \right|$$

$$\leq \left| a(A_\nu) - \sum_{\ell=1}^{\tilde{k}} F_{A_\nu}(\tilde{\gamma}_\ell)\, a(S(\tilde{\Delta}_\ell)) \right| + \left| f_h(A_\nu) - \sum_{\ell=1}^{\tilde{k}} F_{A_\nu}(\tilde{\gamma}_\ell) f_h(S(\tilde{\Delta}_\ell)) \right| = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$(\nu = 1,2,\dots,m)$.

Aus dieser Beziehung sowie aus $\|f_2\| - \|a\|$ folgt, daß $f_2 \in \mathcal{V}_{\varepsilon, A_1, \ldots, A_m}$ gilt. Daher ist $\mathcal{V}_{\varepsilon, A_1, \ldots, A_m} + \phi$. $\mathfrak{W}_a$ ist also eine Filterbasis.

Sei $\mathfrak{X}_{\|a\|} = \{f \in \mathfrak{L}'(\mathfrak{H}) \mid \|f\| \leq \|a\|\}$. Nach 5.19 ist $\mathfrak{X}_{\|a\|}$ schwach kompakt. Es gilt $\mathcal{V}_{\varepsilon, A_1, \ldots, A_m} \subseteq \mathfrak{X}_{\|a\|}$ für jedes $\mathcal{V}_{\varepsilon, A_1, \ldots, A_m} \in \mathfrak{W}_a$. Die Filterbasis $\mathfrak{W}_a$ auf $\mathfrak{F}(\mathfrak{H})$ erfüllt also die Voraussetzungen von Satz 11.2.

Sei $A \in \mathfrak{L}(\mathfrak{H})$. Für jedes $\mathcal{V} \in \mathfrak{W}_a$ setzen wir: $\mathcal{V}(A) = \{g(A) \mid g \in \mathcal{V}\}$. Dann ist $\mathfrak{W}_a(A) = \{\mathcal{V}(A) \mid \mathcal{V} \in \mathfrak{W}_a\}$ eine Filterbasis auf $\mathbb{C}$ (5.42). Wir zeigen, daß $\mathfrak{W}_a(A)$ gegen $a(A)$ konvergiert. Dazu wählen wir ein $\varepsilon > 0$ und suchen ein $\mathcal{V}(A) \in \mathfrak{W}_a(A)$ mit $\mathcal{V}(A) \subseteq \{z \in \mathbb{C} \mid |a(A) - z| < \varepsilon\}$. Dieser Bedingung genügt $\mathcal{V}_{\varepsilon, A}(A) = \{g(A) \mid g \in \mathcal{V}_{\varepsilon, A}\} \in \mathfrak{W}_a(A)$ mit $\mathcal{V}_{\varepsilon, A} = \{g \in \mathfrak{F}(\mathfrak{H}) \mid \|g\| = a(\mathfrak{I}_{\mathfrak{H}}),\ |g(A) - a(A)| < \varepsilon\}$. Also gilt $a(A) = \lim \mathfrak{W}_a(A)$.

Für jedes $A \in \mathfrak{A}$ hat $\mathfrak{W}_a(A)$ den Häufungspunkt $a(A)$; weitere Häufungspunkte gibt es nicht. Nach 5.42 gilt daher für jeden schwachen Häufungspunkt f von $\mathfrak{W}_a$ und alle $A \in \mathfrak{A}$ die Gleichung $f(A) = a(A)$. Damit ist Satz 11.3 bewiesen.

Sei $\mathfrak{W}_a$ eine Filterbasis nach 11.3 und $\widetilde{\mathfrak{W}}_a$ eine Filterbasis auf $\mathfrak{F}(\mathfrak{H})$ so, daß zu jedem $\mathcal{V} \in \mathfrak{W}_a$ ein $\widetilde{\mathcal{V}} \in \widetilde{\mathfrak{W}}_a$ mit $\widetilde{\mathcal{V}} \subseteq \mathcal{V}$ existiert. Dann genügt $\widetilde{\mathfrak{W}}_a$ ebenfalls der Voraussetzung von Satz 11.2. Es gilt daher $[\widetilde{\mathfrak{W}}_a] \neq \phi$. Der von $\widetilde{\mathfrak{W}}_a$ in $\mathfrak{L}'(\mathfrak{H})$ erzeugte Filter ist eine Verfeinerung des von $\mathfrak{W}_a$ erzeugten Filters. Daraus folgt: $[\widetilde{\mathfrak{W}}_a] \subseteq [\mathfrak{W}_a]$. Es gilt also der folgende

Satz: Sei $\mathfrak{A}$, a und $\mathfrak{W}_a$ wie in Satz 11.3. Sei $\widetilde{\mathfrak{W}}_a$ eine Filterbasis auf $\mathfrak{F}(\mathfrak{H})$ so, daß zu jedem $\mathcal{V} \in \mathfrak{W}_a$ ein $\widetilde{\mathcal{V}} \in \widetilde{\mathfrak{W}}_a$ mit $\widetilde{\mathcal{V}} \subseteq \mathcal{V}$ existiert.

Dann genügt $\widetilde{\mathfrak{W}}_a$ der Voraussetzung von Satz 11.3 und es gilt $\phi \neq [\widetilde{\mathfrak{W}}_a] \subseteq [\mathfrak{W}_a]$.

Um irgendwelche Fortsetzungen von a auf $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ nach 11.3 zu erhalten, können wir also anstelle von $\mathfrak{U}_a$ auch eine Filterbasis $\tilde{\mathfrak{U}}_a$ nach 11.4 betrachten. Jedes $f \in [\tilde{\mathfrak{U}}_a]$ ist dann eine Fortsetzung von a auf $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$.

Sei $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ eine Algebra nach 11.3. Die positiven Funktionale über $\mathfrak{A}$ können wir folgendermaßen erhalten: Sei $M_{\mathfrak{A}}$ der Raum der maximalen Ideale von $\mathfrak{A}$. Für jedes $A \in \mathfrak{A}$ und $\gamma \in M_{\mathfrak{A}}$ ist dann eine komplexe Zahl $F_A(\gamma)$ durch die Gleichung $A + \gamma = F_A(\gamma) I_{\mathfrak{H}} + \gamma$ bestimmt. $M_{\mathfrak{A}}$ werde nach [7, S. 208] mit der schwächsten Topologie versehen, in der sämtliche Funktionen $F_A : \gamma \to F_A(\gamma)$ stetig sind. Nach [7, S. 208, Theorem 2] ist $M_{\mathfrak{A}}$ in dieser Topologie kompakt und nach [7, S. 243, 244 und S. 241, Fußnote 2] ist die Abbildung $A \to F_A$ eine Isometrie und ein Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ auf die Algebra aller auf $M_{\mathfrak{A}}$ stetigen komplexwertigen Funktionen mit der Norm $\|F_A\| = \sup_{\gamma \in M_{\mathfrak{A}}} |F_A(\gamma)|$. Wir setzen $L(M_{\mathfrak{A}}) = \{F_A \mid A \in \mathfrak{A}\}$. Die positiven Funktionale über $L(M_{\mathfrak{A}})$ sind ([7, S. 127]) gerade die Integrale auf $L(M_{\mathfrak{A}})$. Daher kann jedes positive Funktional über $\mathfrak{A}$ mit Hilfe eines Integrals auf $L(M_{\mathfrak{A}})$ konstruiert werden und umgekehrt. Jedes Integral auf $L(M_{\mathfrak{A}})$ kann aus einem Maß auf $M_{\mathfrak{A}}$ gewonnen werden. Beispiel: Sei $N = \{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k\}$ eine endliche Teilmenge von $M_{\mathfrak{A}}$. Dann ist $a_N : A \to a_N(N) = \sum_{\ell=1}^{k} F_A(\gamma_\ell)$ ein positives Funktional über $\mathfrak{A}$.

Wir wenden nun Satz 11.3 auf einige spezielle Algebren $\mathfrak{A}$ an.

Sei G ein (nicht notwendig beschränkter) hermitescher Operator in $\mathfrak{H}$ mit der Spektralschar $\{G_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ und der Spektraldarstellung $G = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, dG_\lambda$. Das Spektrum von G werde mit $s(G)$ bezeichnet ($s(G) \subseteq \mathbb{R}$). Es bezeichne $\mathfrak{A}_G$ die Gesamtheit der Operatoren $\gamma(G) = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(\lambda) \, dG_\lambda$ für alle stetigen beschränkten auf $\mathbb{R}$ definierten komplexwertigen Funktionen γ. Offensichtlich gilt $\gamma_1(G) = \gamma_2(G)$ genau dann, wenn $\gamma_1(\lambda) = \gamma_2(\lambda)$ für alle $\lambda \in s(G)$ ist, $\|\gamma(G)\| = \sup_{\lambda \in s(G)} |\gamma(\lambda)|$ und $(\gamma(G))^* = \bar{\gamma}(G)$ für alle $\gamma(G), \gamma_1(G), \gamma_2(G) \in \mathfrak{A}_G$. (Es bedeutet $(\gamma(G))^*$ der zu $\gamma(G)$ adjungierte Operator und $\bar{\gamma}$ die zu γ konjugierte komplexe Funktion.) Für die Funktion $\gamma : \lambda \to 1$

erhält man den Einsoperator $I_{\mathcal{H}} = \int_{-\infty}^{+\infty} d G_\lambda$. Wie man sieht, ist $\mathcal{O}\ell_G$ eine vollständige kommutative und bezüglich der Adjungiertenbildung symmetrische Teilalgebra von $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, die den Einsoperator enthält.

Sei $s \in S(G)$. Wir setzen $a_{G,s}(\gamma(G)) = \gamma(s)$ für alle $\gamma(G) \in \mathcal{O}\ell_G$. Offensichtlich ist dann $a_{G,s} : \gamma(G) \to a_{G,s}(\gamma(G))$ ein positives Funktional über $\mathcal{O}\ell_G$.

Auf die Algebra $\mathcal{O}\ell_G$ und das positive Funktional $a_{G,s}$ wenden wir Satz 11.3 an und erhalten:

Folgerung 1: Sei G ein (nicht notwendig beschränkter) hermitescher Operator in $\mathcal{H}$ mit der Spektraldarstellung $G = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, d G_\lambda$ und $s \in \mathbb{R}$ ein Wert aus dem Spektrum von G.

Dann existiert (mindestens) ein positives Funktional $f_{G,s}$ über $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ so, daß für jeden Operator $\gamma(G) = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(\lambda) \, d G_\lambda$ mit einer auf $\mathbb{R}$ definierten beschränkten stetigen komplexwertigen Funktion γ die Beziehung $f_{G,s}(\gamma(G)) = \gamma(s)$ gilt.

Man kann 11.5 noch etwas verallgemeinern: Sei $\mathcal{G} = \{G_1, G_2, \ldots, G_m\}$ eine endliche Menge (nicht notwendig beschränkter) hermitescher Operatoren in $\mathcal{H}$ mit paarweise vertauschbaren Spektralscharen. Es sei $G_\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda_\nu \, d G_{\nu,\lambda}$ für $\nu = 1, 2, \ldots, m$. Sei $\mathcal{S} = \{s_1, s_2, \ldots, s_m\}$ so, daß s_ν für $\nu = 1, 2, \ldots, m$ zum Spektrum von G_ν gehört. Dann existiert (mindestens) ein positives Funktional $f_{\mathcal{G},\mathcal{S}}$ über $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ so, daß für jeden Operator $\gamma(\mathcal{G}) = \int_{\mathbb{R}_m} \gamma(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) \, d G_{1,\lambda_1} \cdot d G_{2,\lambda_2} \cdots d G_{m,\lambda_m}$ mit einer auf $\mathbb{R}_m$ definierten beschränkten stetigen komplexwertigen Funktion γ die Beziehung $f_{\mathcal{G},\mathcal{S}}(\gamma(\mathcal{G})) = \gamma(s_1, s_2, \ldots, s_m)$ gilt. Wir wollen jedoch nur die Orts- und Impulsoperatoren $Q_1, \ldots, Q_m, P_1, \ldots, P_m$ von $\mathcal{M}$ näher betrachten.

Sei $\mathcal{Q} = \{Q_1, \ldots, Q_m\}$, $\mathcal{P} = \{P_1, \ldots, P_m\}$ und V eine Isometrie von $\mathcal{H}$ auf $L^2(\mathbb{R}_m)$ so, daß $Q_\nu = V^{-1}(x_\nu) V$ und $P_\nu = V^{-1}\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\right) V$ für $\nu = 1, 2, \ldots, m$ gilt (10.1). Sei T der Fourier-Plancherel-Operator von $L^2(\mathbb{R}_m)$ auf sich (2.7). Es bezeichne $\mathfrak{M} \subseteq \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}_m))$ die Gesamtheit der Operatoren der

Multiplikation mit einer auf $\mathbb{R}_m$ definierten stetigen komplexwertigen beschränkten Funktion γ. Dann gilt $\|\gamma_\bullet\| = \sup_{(x_1,\dots,x_m)\in\mathbb{R}_m} |\gamma(x_1,\dots,x_m)|$, $(\gamma_\bullet)^* = (\bar{\gamma}_\bullet)$ für jeden Multiplikationsoperator $\gamma_\bullet \in \mathfrak{M}$ ($\bar{\gamma}$ sei die zu γ konjugiert komplexe Funktion) und $\mathfrak{M}$ ist eine Teilalgebra von $\mathfrak{L}(L^2(\mathbb{R}_m))$, die der Voraussetzung des Satzes 11.3 genügt.

Wir setzen $\gamma(\mathfrak{P}) = V^{-1}(\gamma_\bullet)V$, $\gamma(\mathfrak{P}) = (TV)^{-1}(\gamma_\bullet)TV$ für alle $\gamma_\bullet \in \mathfrak{M}$ (offensichtlich gilt $\gamma(\mathfrak{P}) = \int_{\mathbb{R}_m} \gamma(\lambda_1,\dots,\lambda_m)\, dR(E^1_{\lambda_1})\cdots dR(E^m_{\lambda_m})$ und $\gamma(\mathfrak{P}) = \int_{\mathbb{R}_m} \gamma(\lambda_1,\dots,\lambda_m)\, dR(F^1_{\lambda_1})\cdots dR(F^m_{\lambda_m})$), $\mathfrak{A}_\mathfrak{P} = V^{-1}\mathfrak{M}V$ und $\mathfrak{A}_\mathfrak{P} = V^{-1}\mathfrak{M}V$.

Sei $\vartheta = (\alpha_1,\dots,\alpha_m)$. Wir setzen $a_{\mathfrak{P},\vartheta}(\gamma(\mathfrak{P})) = \gamma(\alpha_1,\dots,\alpha_m)$ für alle $\gamma(\mathfrak{P}) \in \mathfrak{A}_\mathfrak{P}$ und $a_{\mathfrak{P},\vartheta}(\gamma(\mathfrak{P})) = \gamma(\alpha_1,\dots,\alpha_m)$ für alle $\gamma(\mathfrak{P}) \in \mathfrak{A}_\mathfrak{P}$.
Dann ist $a_{\mathfrak{P},\vartheta}$ bzw. $a_{\mathfrak{P},\vartheta}$ ein positives Funktional über $\mathfrak{A}_\mathfrak{P}$ bzw. $\mathfrak{A}_\mathfrak{P}$.

Auf die Algebren $\mathfrak{A}_\mathfrak{P}$, $\mathfrak{A}_\mathfrak{P}$ und die positiven Funktionale $a_{\mathfrak{P},\vartheta}$, $a_{\mathfrak{P},\vartheta}$ wenden wir Satz 11.3 an und erhalten die

11.6 Folgerung 2: Sei $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{L}(L^2(\mathbb{R}_m))$ die Algebra aller Multiplikationsoperatoren $\gamma_\bullet$ mit beschränkten stetigen komplexwertigen Funktionen γ auf $\mathbb{R}_m$, $\gamma(\mathfrak{P}) = V^{-1}(\gamma_\bullet)V$, $\gamma(\mathfrak{P}) = (TV)^{-1}(\gamma_\bullet)TV$ für alle $\gamma_\bullet \in \mathfrak{M}$, $\mathfrak{A}_\mathfrak{P} = V^{-1}\mathfrak{M}V$, $\mathfrak{A}_\mathfrak{P} = (TV)^{-1}\mathfrak{M}(TV)$ (mit V und T nach 10.1 bzw. 2.7) und $\vartheta = (\alpha_1,\dots,\alpha_m) \in \mathbb{R}_m$.

Dann existieren positive Funktionale $f_{\mathfrak{P},\vartheta}$ und $f_{\mathfrak{P},\vartheta}$ über $\mathfrak{L}(\mathfrak{H})$ so, daß $f_{\mathfrak{P},\vartheta}(\gamma(\mathfrak{P})) = \gamma(\alpha_1,\dots,\alpha_m)$ für jedes $\gamma(\mathfrak{P}) \in \mathfrak{A}_\mathfrak{P}$ und $f_{\mathfrak{P},\vartheta}(\gamma(\mathfrak{P})) = \gamma(\alpha_1,\dots,\alpha_m)$ für jedes $\gamma(\mathfrak{P}) \in \mathfrak{A}_\mathfrak{P}$ gilt.

E. Physikalische Folgerungen

Wir untersuchen die physikalische Bedeutung der positiven Funktionale $f_{G,s}$, $f_{\mathfrak{P},\vartheta}$ und $f_{\mathfrak{P},\vartheta}$ aus 11.5 und 11.6.

Sei $G = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda\, dG_\lambda$, $s \in \mathbb{R}$ und $f_{G,s}$ wie in 11.5. Sei $\{E_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ eine

Observable von $\mathfrak{H}$ so, daß $G = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, d G_\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, d R(E_\lambda)$ gilt. Es gilt $\| f_{G,s} \| = f_{G,s}(I_{\mathfrak{H}}) = 1$. Wir nehmen an, daß $f_{G,s}$ ein Zustand von $\mathfrak{H}$ im Modell $\mathcal{M}$ ist. Die Berechnung des Erwartungswertes $f_{G,s}(G) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, d f_{G,s}(G_\lambda)$ (10.5) von $\{E_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ in diesem Zustand ergibt: $f_{G,s}(G) = s$. Für die Streuung erhalten wir: $f_{G,s}((G-s)^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda - s)^2 \, d f_{G,s}(G_\lambda) = (s-s)^2 = 0$. Eine Messung von $\{E_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ im Zustand $f_{G,s}$ ergibt daher mit Sicherheit den Meßwert s. Es ist s ein "scharfer" Meßwert.

In einem üblichen Modell der Quantenmechanik ist eine solche Aussage nur dann möglich, wenn s ein Eigenwert von G ist([4, S. 44]). Hier dagegen kann s ein beliebiger Wert des Spektrums sein. Auch aus dieser Tatsache folgt, daß die Modelle mit Zeitoperator (10.1) umfassender sind als die üblichen Modelle (2.1).

Eine entsprechende Aussage erhalten wir für die Funktionale $f_{Q,\vartheta}$ und $f_{P,\vartheta}$ aus 11.6.

Wir betrachten die kanonischen Observablen $\{E_\lambda^\nu \mid \lambda \in \mathbb{R}\}, \{F_\lambda^\nu \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ $(\nu = 1, \ldots, m)$ von $\mathfrak{H}$ und die zugehörigen Operatoren $Q_\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, d R(E_\lambda^\nu)$ und $P_\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, d R(F_\lambda^\nu)$. Sei $\vartheta = (d_1, \ldots, d_m) \in \mathbb{R}_m$. Wir nehmen an, daß $f_{Q,\vartheta}$ und $f_{P,\vartheta}$ (11.6) Zustände von $\mathfrak{H}$ in $\mathcal{M}$ sind. Für $\nu = 1, 2, \ldots, m$ erhalten wir $f_{Q,\vartheta}(Q_\nu) = d_\nu$, $f_{P,\vartheta}(P_\nu) = d_\nu$, $f_{Q,\vartheta}((Q_\nu - d_\nu)^2) = 0$ und $f_{P,\vartheta}((P_\nu - d_\nu)^2) = 0$. Eine Messung der kanonischen Observablen $\{E_\lambda^\nu \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ für $\nu = 1, \ldots, m$ (Ortsmessung) im Zustand $f_{Q,\vartheta}$ ergibt mit Sicherheit die Werte $d_1, d_2, \ldots, d_m$ und eine Messung der kanonischen Observablen $\{F_\lambda^\nu \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ für $\nu = 1, \ldots, m$ (Impulsmessung) im Zustand $f_{P,\vartheta}$ ergibt ebenfalls mit Sicherheit die Werte $d_1, d_2, \ldots, d_m$.

In einem üblichen Modell ist diese Aussage nicht möglich, weil die Operatoren $Q_1, \ldots, Q_m, P_1, \ldots, P_m$ keine Eigenwerte besitzen.

F. Beispiel

Wir wollen uns als Beispiel mit der Konstruktion der Funktionale $f_{\mathfrak{o}_1,\vartheta}$ (11.5) für $\vartheta = (d_1, d_2, \ldots, d_m) \in \mathbb{R}_m$ beschäftigen. Für die Funktionale $f_{\mathfrak{R},\vartheta}$ verläuft die Rechnung analog.

Sei $\vartheta = (d_1, d_2, \ldots, d_m) \in \mathbb{R}_m$. Gesucht ist eine Fortsetzung $f_{\mathfrak{o}_1,\vartheta}$ des über $\mathfrak{A}_{\mathfrak{o}_1}$ definierten positiven Funktionals $a_{\mathfrak{o}_1,\vartheta} : \gamma(\mathfrak{o}_1) \to \gamma(d_1, d_2, \ldots, d_m)$ auf ganz $\mathfrak{L}_b(\mathfrak{H})$.

Sei $\mathfrak{V}_{a_{\mathfrak{o}_1,\vartheta}}$ die zu $a_{\mathfrak{o}_1,\vartheta}$ gehörige Filterbasis aus 11.3. Dann ist nach 11.3 jedes $f \in [\mathfrak{V}_{a_{\mathfrak{o}_1,\vartheta}}] \neq \emptyset$ eine Fortsetzung der gewünschten Art. Zur Vereinfachung der Rechnung verwenden wir Satz 11.4 und suchen eine Filterbasis $\tilde{\mathfrak{V}}_{a_{\mathfrak{o}_1,\vartheta}}$ auf $\mathfrak{F}(\mathfrak{H})$ so, daß zu jedem $\mathfrak{V} \in \mathfrak{V}_{a_{\mathfrak{o}_1,\vartheta}}$ ein $\tilde{\mathfrak{V}} \in \tilde{\mathfrak{V}}_{a_{\mathfrak{o}_1,\vartheta}}$ mit $\tilde{\mathfrak{V}} \subseteq \mathfrak{V}$ existiert. Dann gilt $\emptyset \neq [\tilde{\mathfrak{V}}_{a_{\mathfrak{o}_1,\vartheta}}] \subseteq [\mathfrak{V}_{a_{\mathfrak{o}_1,\vartheta}}]$ und jedes $f \in [\tilde{\mathfrak{V}}_{a_{\mathfrak{o}_1,\vartheta}}]$ ist ebenfalls eine Fortsetzung der gewünschten Art.

Um eine solche Filterbasis $\tilde{\mathfrak{V}}_{a_{\mathfrak{o}_1,\vartheta}}$ zu konstruieren, definieren wir für $\mu = 1, 2, \ldots$ eine Funktion $\tilde{h}_{\mu,\vartheta}$ auf $\mathbb{R}_m$:

$$\tilde{h}_{\mu,\vartheta} : (x_1, \ldots, x_m) \to \tilde{h}_{\mu,\vartheta}(x_1, \ldots, x_m) = \begin{cases} \mu^{\frac{m}{2}} & \text{für } d_\varrho - \frac{1}{2\mu} \leq x_\varrho \leq d_\varrho + \frac{1}{2\mu} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad [\varrho = 1, 2, \ldots, m]$$

$\tilde{h}_{\mu,\vartheta}$ nimmt lediglich auf dem Würfel $\mathfrak{W}_{\mu,\vartheta} = \{(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}_m \mid d_\varrho - \frac{1}{2\mu} \leq x_\varrho \leq d_\varrho + \frac{1}{2\mu}, \varrho = 1, \ldots, m\}$ von Null verschiedene Werte an.

Es gilt $\int_{\mathbb{R}_m} |\tilde{h}_{\mu,\vartheta}(x_1, \ldots, x_m)|^2 dx_1 \cdots dx_m = \int_{\mathfrak{W}_{\mu,\vartheta}} (\mu^{\frac{m}{2}})^2 dx_1 \cdots dx_m = 1$.
Daraus folgt: $\tilde{h}_{\mu,\vartheta} \in L^2(\mathbb{R}_m)$ und $\| \tilde{h}_{\mu,\vartheta} \| = 1$ für $\mu = 1, 2, \ldots$.

Wir setzen $h_{\mu,\vartheta} = V^{-1} \tilde{h}_{\mu,\vartheta}$ (mit V nach 10.1). Dann ist $h_{\mu,\vartheta} \in \mathfrak{H}$ und $\| h_{\mu,\vartheta} \| = 1$ für $\mu = 1, 2, \ldots$. Es sei $f_{h_{\mu,\vartheta}}$ das zu $h_{\mu,\vartheta}$

für $\mu = 1,2,\ldots$ gehörige Funktional aus $\mathfrak{F}(\mathfrak{H})$. Dann gilt auch $\|f_{h_{\mu,\vartheta}}\| = 1 \quad (\mu = 1,2,\ldots)$.

Sei $\mathfrak{V}_{\mu,\vartheta} = \{f_{h_{\nu,\vartheta}} \mid \nu \geq \mu\}$ für $\mu = 1,2,\ldots$. Dann ist $\widetilde{\mathfrak{V}}_{a_{\mathfrak{A},\vartheta}} = \{\mathfrak{V}_{\mu,\vartheta} \mid \mu = 1,2,\ldots\}$ eine Filterbasis auf $\mathfrak{F}(\mathfrak{H})$. Wir zeigen nun, daß $\widetilde{\mathfrak{V}}_{a_{\mathfrak{A},\vartheta}}$ die gewünschte Eigenschaft besitzt.

Dazu sei ein $\mathfrak{V}_{\varepsilon,A_1,\ldots,A_m} \in \mathfrak{V}_{a_{\mathfrak{A},\vartheta}}$ gegeben $(\varepsilon > 0, A_\nu \in \mathfrak{A}_\mathfrak{A}, \nu = 1,\ldots,m)$ Gesucht ist ein $\tilde{\nu}$ so, daß $\mathfrak{V}_{\tilde{\nu},\vartheta} \subseteq \mathfrak{V}_{\varepsilon,A_1,\ldots,A_m}$ gilt. Die Beziehung $\mathfrak{V}_{\tilde{\nu},\vartheta} \subseteq \mathfrak{V}_{\varepsilon,A_1,\ldots,A_m}$ ist gleichbedeutend mit der Ungleichung $|(A_\varrho h_{\mu,\vartheta}, h_{\mu,\vartheta}) - a_{\mathfrak{A},\vartheta}(A_\varrho)| < \varepsilon$ für $\mu \geq \tilde{\nu}$ und $\varrho = 1,2,\ldots,m$. Der Operator $A_\varrho \in \mathfrak{A}_\mathfrak{A}$ hat die Form $y_\varrho(\mathfrak{A})$ für $\varrho = 1,2,\ldots,m$ und es gilt $a_{\mathfrak{A},\vartheta}(A_\varrho) = a_{\mathfrak{A},\vartheta}(y_\varrho(\mathfrak{A})) = y_\varrho(a_1,\ldots,a_m)$. Für $\varrho = 1,2,\ldots,m$ und $\nu = 1,2,\ldots$ erhalten wir dann:

$$|(A_\varrho h_{\mu,\vartheta}, h_{\mu,\vartheta}) - a_{\mathfrak{A},\vartheta}(A_\varrho)| = |(A_\varrho h_{\mu,\vartheta}, h_{\mu,\vartheta}) - y_\varrho(a_1,\ldots,a_m)| =$$
$$= |(y_\varrho \cdot \tilde{h}_{\mu,\vartheta}, \tilde{h}_{\mu,\vartheta}) - y_\varrho(a_1,a_2,\ldots,a_m)| =$$
$$= \left|\int_{\mathfrak{M}_{\mu,\vartheta}} \mu^m (y_\varrho(x_1,\ldots,x_m) - y_\varrho(a_1,\ldots,a_m)) dx_1 \cdots dx_m\right|.$$

Der letzte Ausdruck ist für alle $\varrho = 1,2,\ldots,m$ stets $< \varepsilon \cdot \int_{\mathfrak{M}_{\mu,\vartheta}} \mu^m dx_1 \cdots dx_m$, wenn $|y_\varrho(x_1,\ldots,x_m) - y_\varrho(a_1,\ldots,a_m)| < \varepsilon$ für $(x_1,\ldots,x_m) \in \mathfrak{M}_{\mu,\vartheta}$ gilt. Diese Bedingung kann für ein passend gewähltes $\mu = \tilde{\nu}$ wegen der Stetigkeit der Funktionen y_ϱ $(\varrho = 1,\ldots,m)$ erfüllt werden. Dann gilt $|(A_\varrho h_{\mu,\vartheta}, h_{\mu,\vartheta}) - a_{\mathfrak{A},\vartheta}(A_\varrho)| < \varepsilon$ für $\mu \geq \tilde{\nu}, \varrho = 1,\ldots,m$ und daher $\mathfrak{V}_{\tilde{\nu},\vartheta} \subseteq \mathfrak{V}_{\varepsilon,A_1,\ldots,A_m}$.

$\widetilde{\mathfrak{V}}_{a_{\mathfrak{A},\vartheta}} = \{\mathfrak{V}_{\mu,\vartheta} \mid \mu = 1,2,\ldots\}$ ist also eine Filterbasis nach 11.4 und jedes positive Funktional $f \in [\widetilde{\mathfrak{V}}_{a_{\mathfrak{A},\vartheta}}] \neq \emptyset$ ist eine Fortsetzung von $a_{\mathfrak{A},\vartheta}$ auf $\mathfrak{L}(\mathfrak{H})$.

Sei $f \in [\widetilde{\mathfrak{V}}_{a_{\mathfrak{A},\vartheta}}]$. Jeder Funktionswert $f(A)$ für $A \in \mathfrak{A}_\mathfrak{A}$ kann dann (wegen $f(A) = a_{\mathfrak{A},\vartheta}(A)$ für $A \in \mathfrak{A}_\mathfrak{A}$) einfach ermittelt werden. Daraus kann man die Wahrscheinlichkeiten für die Eigenschaften der Koordinaten des Ortes und der Zeit berechnen, wenn sich das System $\mathfrak{A}$ im Zustand f befindet.

Für die Anwendung sind außerdem vor allem die Werte $f(A)$ für $A \in \mathcal{O}_{\mathcal{P}}$ (11. 6) von Bedeutung. Man kann daraus die Wahrscheinlichkeiten für die Eigenschaften der Koordinaten des Impulses und der Energie berechnen, wenn sich $\mathcal{T}$ im Zustand f befindet. Derartige Werte $f(A)$ wollen wir nach dem Verfahren in C konstruieren.

Sei $A \in \mathcal{O}_{\mathcal{P}}$. Dann gilt $A = \gamma(\mathcal{P})$ für eine geeignete auf $\mathfrak{R}_m$ definierte Funktion γ (11. 6). Für jedes $\mathfrak{V}_{\mu,\vartheta} \in \widetilde{\mathfrak{D}}_{a_{\mathcal{O}_{\mu,\vartheta}}}$ sei $\mathfrak{V}_{\mu,\vartheta}(A) = \{q(A) \mid q \in \mathfrak{V}_{\mu,\vartheta}\}$. Die Gesamtheit aller $f(A)$ für $f \in [\widetilde{\mathfrak{D}}_{a_{\mathcal{O}_{\mu,\vartheta}}}]$ fällt mit der Menge der Häufungspunkte der auf $\mathbb{C}$ gegebenen Filterbasis $\widetilde{\mathfrak{D}}_{a_{\mathcal{O}_{\mu,\vartheta}}}(A) = \{\mathfrak{V}_{\mu,\vartheta}(A) \mid_{\mu=1,2,\ldots}\}$ zusammen; man kann sie folgendermaßen berechnen:

$\widetilde{\mathfrak{D}}_{a_{\mathcal{O}_{\mu,\vartheta}}}(A)$ besteht aus den Endstücken der Folge $\{f_{h_{1,\vartheta}}(A), f_{h_{2,\vartheta}}(A), \ldots$ Die Häufungspunkte der Filterbasis $\widetilde{\mathfrak{D}}_{a_{\mathcal{O}_{\mu,\vartheta}}}(A)$ sind zugleich die Häufungspunkte dieser Folge im üblichen Sinn. Es genügt daher, diese Folge zu betrachten.

Es gilt $f_{h_{\mu,\vartheta}}(A) = (A h_{\mu,\vartheta}, h_{\mu,\vartheta}) = (\gamma(\mathcal{P}) h_{\mu,\vartheta}, h_{\mu,\vartheta}) =$
$(V^{-1}T^{-1}(\gamma\bullet)TVV^{-1}\tilde{h}_{\mu,\vartheta}, V^{-1}\tilde{h}_{\mu,\vartheta}) = ((\gamma\bullet)T\tilde{h}_{\mu,\vartheta}, T\tilde{h}_{\mu,\vartheta})$.

$T\tilde{h}_{\mu,\vartheta}$ kann nach 2. 7 berechnet werden. Wir erhalten für $\mu = 1,2,\ldots$:

$$(T\tilde{h}_{\mu,\vartheta})(x_1,\ldots,x_m) = (\lim_{m\to\infty} T_m \tilde{h}_{\mu,\vartheta})(x_1,\ldots,x_m) =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\right)^m \int_{\mathfrak{R}_n} \tilde{h}_{\mu,\vartheta}(y_1,\ldots,y_m) e^{-\frac{i}{\hbar}(x_1y_1+\cdots+x_my_m)} dy_1\cdots dy_m =$$

$$= \left(\sqrt{\frac{\mu}{2\pi\hbar}}\right)^m \int_{\mathfrak{V}_{\mu,\vartheta}} e^{-\frac{i}{\hbar}(x_1y_1+\cdots+x_my_m)} dy_1\cdots dy_m =$$

$$= \left(\sqrt{\frac{\mu}{2\pi\hbar}}\right)^m \int_{d_1-\frac{1}{2\mu}}^{d_1+\frac{1}{2\mu}} e^{-\frac{i}{\hbar}x_1y_1} dy_1 \cdots \int_{d_m-\frac{1}{2\mu}}^{d_m+\frac{1}{2\mu}} e^{-\frac{i}{\hbar}x_my_m} =$$

$$= \left(\sqrt{\frac{\mu}{2\pi i \hbar}}\right)^n e^{-\frac{i}{\hbar}(a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n)} \cdot 2^n \cdot \frac{\sin\left(\frac{x_1}{2\hbar\mu}\right)}{\left(\frac{x_1}{\hbar}\right)} \cdot \ldots \cdot \frac{\sin\left(\frac{x_n}{2\hbar\mu}\right)}{\left(\frac{x_n}{\hbar}\right)} =$$

$$= e^{-\frac{i}{\hbar}(a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n)} \frac{1}{\sqrt{2\pi i \hbar\mu}} \frac{\sin\left(\frac{x_1}{2\hbar\mu}\right)}{\left(\frac{x_1}{2\hbar\mu}\right)} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi i \hbar\mu}} \frac{\sin\left(\frac{x_n}{2\hbar\mu}\right)}{\left(\frac{x_n}{2\hbar\mu}\right)}.$$

Zur Abkürzung setzen wir $S_\mu(x_\varrho) = \frac{1}{2\pi i \hbar\mu} \frac{\sin^2\left(\frac{x_\varrho}{2\hbar\mu}\right)}{\left(\frac{x_\varrho}{2\hbar\mu}\right)^2}$

für $\varrho = 1, 2, \ldots, n$, $\mu = 1, 2, \ldots$. Damit erhalten wir $f_{h_{\mu,\sigma}}(A) =$

$= f_{h_{\mu,\sigma}}(\gamma(\mathfrak{P})) = \int_{\mathbb{R}_n} \gamma(x_1, \ldots, x_n)\, S_\mu(x_1) \cdot \ldots \cdot S_\mu(x_n)\, dx_1 \cdot \ldots \cdot dx_n.$

Die Häufungspunkte der Folge $\{f_{h_{1,\sigma}}(A), f_{h_{2,\sigma}}(A), \ldots\}$ (im üblichen Sinn) können nach dieser Formel berechnet werden. Dadurch erhalten wir die Werte $f(A)$ für alle $f \in [\widetilde{\mathfrak{W}}_{a_{\sigma 1,\sigma}}]$.

Eine Abschätzung zeigt, daß die Folge $\{f_{h_{1,\sigma}}(\gamma(\mathfrak{P})), \ldots\}$ im Falle einer stetigen fastperiodischen [1] Funktion γ einen Limes, also genau einen Häufungspunkt besitzt. Die Werte $f(\gamma(\mathfrak{P}))$ stimmen dann für alle $f \in [\widetilde{\mathfrak{W}}_{a_{\sigma 1,\sigma}}]$ überein. Es gilt in diesem Fall:

$$f(\gamma(\mathfrak{P})) = \lim_{\mu\to\infty} \int_{\mathbb{R}_n} \gamma(x_1, \ldots, x_n)\, S_\mu(x_1) \cdot \ldots \cdot S_\mu(x_n)\, dx_1 \cdot \ldots \cdot dx_n.$$

Dieser Wert ist gleich dem bekannten Mittelwert der fastperiodischen Funktion γ. Es gilt:

$$f(\gamma(\mathfrak{P})) = \lim_{\mu\to\infty} \left(\frac{1}{\mu}\right)^n \int_{\mathfrak{W}_{\mu,\sigma}} \gamma(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \cdot \ldots \cdot dx_n.$$

Dabei ist $\mathfrak{W}_{\mu,\sigma} = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid -\frac{1}{2\mu} \leq x_\varrho \leq +\frac{1}{2\mu},\ \varrho = 1, 2, \ldots, n\}$.

Im Fall eines beliebigen Operators $\gamma(\mathfrak{P})$ erfordert die Weiterführung des Verfahrens in C die Auswahl von Teilfolgen der Folge $\{f_{h_{1,\sigma}}(\gamma(\mathfrak{P})), \ldots\}$, die gegen die einzelnen Häufungspunkte konvergieren. Mit diesen Teilfolgen

---

1) Definition in [5]

anstelle von $\{ f_{k_{1,2}}(\gamma(\mathfrak{R}))_1 \quad \}$ und mit einem weiteren von A verschiedenen Element $\mathfrak{B} \in \mathfrak{A}_{,\mathfrak{R}}$ kann dann die Rechnung wiederholt werden.

§ 12. Die Konstruktion eines Modells mit Zeitoperator für ein gegebenes System

Sei $\mathfrak{P}$ ein physikalisches System mit Zeitmessung. Die Erweiterungen modifizierter üblicher Modelle $\mathcal{E}(\mathcal{M}_2^{\mathfrak{P}})$ (§ 9) sind Modelle der Quantenmechanik mit Zeitoperator im Sinne von § 10. Nach Abschnitt II ist es sinnvoll, ein Modell $\mathcal{E}(\mathcal{M}_2^{\mathfrak{P}})$ als Ansatz für ein Modell $\mathcal{M}^{\mathfrak{P}}$ mit Zeitoperator zu wählen.

Sei also $\mathcal{M}_2^{\mathfrak{P}}$ ein zu $\mathfrak{P}$ gehöriges modifiziertes übliches Modell (§ 7) mit einem hermiteschen Hamiltonoperator $H_2^{\mathfrak{P}}$. (Im allgemeinen wird man ein solches Modell nach § 7, B, konstruieren.) Dann setzen wir:

$$\mathcal{M}^{\mathfrak{P}} = \mathcal{E}(\mathcal{M}_2^{\mathfrak{P}}).$$

Die Konstruktion des Modells $\mathcal{E}(\mathcal{M}_2^{\mathfrak{P}})$ nach 9.3 wird jedoch im allgemeinen Schwierigkeiten bereiten, weil die Spektraldarstellung des Hamiltonoperators $H_2^{\mathfrak{P}}$ von $\mathcal{M}_2^{\mathfrak{P}}$ dabei bekannt sein muß. Wir wollen daher das Verfahren zur Konstruktion der Modelle $\mathcal{E}(\mathcal{M}_2^{\mathfrak{P}})$ verallgemeinern. Die Voraussetzung daß $H_2^{\mathfrak{P}}$ hermitesch ist, wird wesentlich abgeschwächt werden. Zu diesem Zweck untersuchen wir zunächst die Konstruktion von

A. Operatoren als Limites von Filterbasen

Sei $\mathfrak{H}$ ein Hilbertraum, $\mathfrak{A}$ ein Banachraum und τ eine stetige Darstellung[1] von $\mathfrak{L}(\mathfrak{H})$ in $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$. Es sei dabei zugelassen, daß $\tau(AB) = \tau(B)\tau(A)$

[1] Definition in 5.25

anstelle von $\tau(AB) = \tau(A)\tau(B)$ für alle $A, B \in \mathfrak{L}(\mathfrak{H})$ gilt (daß also τ ein stetiger Antihomomorphismus ist).

Wir betrachten zunächst in $\mathfrak{H}$ einen hermiteschen Operator: $H = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, d H_\lambda$
Wenn $H \in \mathfrak{L}(\mathfrak{H})$ gilt, so erhält man (im Sinne der Operatornorm, analog 5.13): $\tau(H) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, d\tau(H_\lambda)$. Wenn H nichtbeschränkt ist, so kann ebenfalls ein Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, d\tau(H_\lambda)$ konstruiert werden (analog zu 5.15):
Es gelte $\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, d\tau(H_\lambda)\right)\varphi = \lim_{\gamma,\delta \to \infty} \left(\int_{-\gamma}^{\delta} \lambda \, d\tau(H_\lambda)\right)\varphi$ für jedes $\varphi \in \mathfrak{M}$, für das dieser Limes bezüglich der Norm von $\mathfrak{H}$ existiert; die Gesamtheit dieser $\varphi \in \mathfrak{M}$ (es gehört stets der Nullvektor hinzu) sei der Definitionsbereich von $\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, d\tau(H_\lambda)$.

Sei $F_{\gamma,\delta} = \left\{ \int_{-\gamma'}^{\delta'} \lambda \, d H_\lambda \mid \gamma' \geq \gamma, \delta' \geq \delta \right\}$, $\tau(F_{\gamma,\delta}) = \left\{ \tau\left(\int_{-\gamma'}^{\delta'} \lambda \, d H_\lambda \right) \mid \gamma' \geq \gamma, \delta' \geq \delta \right\}$,
$\tau(F_{\gamma,\delta})\varphi = \left\{ \tau\left(\int_{-\gamma'}^{\delta'} \lambda \, d H_\lambda \right)\varphi \mid \gamma' \geq \gamma, \delta' \geq \delta \right\}$, $\mathfrak{F}_H = \left\{ F_{\gamma,\delta} \mid \gamma, \delta > 0 \right\}$, $\tau(\mathfrak{F}_H) = \left\{ \tau(F_{\gamma,\delta}) \mid \gamma, \delta > 0 \right\}$
und $\tau(\mathfrak{F}_H)\varphi = \left\{ \tau(F_{\gamma,\delta})\varphi \mid \gamma, \delta > 0 \right\}$. Dann sind $\mathfrak{F}_H$, $\tau(\mathfrak{F}_H)$ und $\tau(\mathfrak{F}_H)\varphi$ $(\varphi \in \mathfrak{M})$ Filterbasen auf $\mathfrak{L}(\mathfrak{H})$, $\mathfrak{L}(\mathfrak{H})$ und $\mathfrak{M}$. Es gilt $\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, d\tau(H_\lambda)\right)\varphi = \lim_{\gamma,\delta \to \infty} \left(\int_{-\gamma}^{\delta} \lambda \, d\tau(H_\lambda)\right)\varphi = \lim \tau(\mathfrak{F}_H)\varphi$ für jedes $\varphi \in \mathfrak{M}$, für das einer der Limites existiert. Wir setzen $\mathfrak{Lim}\, \tau(\mathfrak{F}_H) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, d\tau(H_\lambda)$. Wir wollen nun einen solchen Operator für eine beliebige Filterbasis auf $\mathfrak{L}(\mathfrak{H})$ erklären.

Definition: Sei $\mathfrak{O}_\mathfrak{f}$ eine Filterbasis auf $\mathfrak{L}(\mathfrak{H})$. Für $G \in \mathfrak{O}_\mathfrak{f}$ und $\varphi \in \mathfrak{M}$ werde gesetzt: $\tau(G) = \{\tau(A) \mid A \in G\}$, $\tau(G)\varphi = \{\tau(A)\varphi \mid A \in G\}$,
$\tau(\mathfrak{O}_\mathfrak{f}) = \{\tau(G) \mid G \in \mathfrak{O}_\mathfrak{f}\}$, $\tau(\mathfrak{O}_\mathfrak{f})\varphi = \{\tau(G)\varphi \mid G \in \mathfrak{O}_\mathfrak{f}\}$. ($\tau(\mathfrak{O}_\mathfrak{f})$ und $\tau(\mathfrak{O}_\mathfrak{f})\varphi$ sind Filterbasen auf $\mathfrak{L}(\mathfrak{M})$ und $\mathfrak{M}$.)

Dann sei $\mathfrak{Lim}\, \tau(\mathfrak{O}_\mathfrak{f})$ der folgende Operator in $\mathfrak{M}$: Es gelte $(\mathfrak{Lim}\, \tau(\mathfrak{O}_\mathfrak{f}))\varphi = \lim \tau(\mathfrak{O}_\mathfrak{f})\varphi$ für jedes $\varphi \in \mathfrak{M}$, für das $\tau(\mathfrak{O}_\mathfrak{f})\varphi$ bezüglich der Norm von $\mathfrak{H}$ konvergiert; die Gesamtheit dieser $\varphi \in \mathfrak{M}$ (es gehört der Nullvektor dazu) sei der Definitionsbereich von $\mathfrak{Lim}\, \tau(\mathfrak{O}_\mathfrak{f})$.

Wenn wir für τ die identische Abbildung $\tau_i : A \to A$ von $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ auf sich nehmen, so erhalten wir für jede Filterbasis $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ einen Operator in $\mathcal{H}$.

12.2 Bezeichnung: Es bezeichne $\mathfrak{L}_\tau(\mathcal{H})$ die Gesamtheit der Operatoren $\mathfrak{Lim}\tau(\mathfrak{G})$ für alle Filterbasen $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$. Für die identische Abbildung $\tau_i : A \to A$ von $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ auf sich werde $\mathfrak{Lim}\mathfrak{G} = \mathfrak{Lim}\tau_i(\mathfrak{G})$ (für alle Filterbasen $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$) und $\mathfrak{L}(\mathcal{H}) = \mathfrak{L}_{\tau_i}(\mathcal{H})$ gesetzt.

12.3 Satz: 1. Jedes Element von $\mathfrak{L}_\tau(\mathcal{H})$ ist ein linearer Operator in $\mathcal{H}$.

2. Sei $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ und $\mathfrak{Lim}\tau(\mathfrak{G}_1), \mathfrak{Lim}\tau(\mathfrak{G}_2) \in \mathfrak{L}_\tau(\mathcal{H})$. Dann existiert ein $\mathfrak{Lim}\tau(\mathfrak{G}_3) \in \mathfrak{L}_\tau(\mathcal{H})$ so, daß $\alpha_1 \mathfrak{Lim}\tau(\mathfrak{G}_1) + \alpha_2 \mathfrak{Lim}\tau(\mathfrak{G}_2) \subseteq \mathfrak{Lim}\tau(\mathfrak{G}_3)$ ist.

3. $\mathfrak{B}(\mathcal{H}) \subset \mathfrak{L}(\mathcal{H})$.

4. Jeder hermitesche Operator in $\mathcal{H}$ gehört zu $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$.

Beweis: 1. Sei $\mathfrak{Lim}\tau(\mathfrak{G}) \in \mathfrak{L}_\tau(\mathcal{H})$, $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{H}$ und $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$. Wenn $\lim\tau(\mathfrak{G})\varphi_1$ und $\lim\tau(\mathfrak{G})\varphi_2$ existieren, so existiert auch $\lim\tau(\mathfrak{G})(\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2)$ und es gilt $\lim\tau(\mathfrak{G})(\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2) = \alpha_1 \lim\tau(\mathfrak{G})\varphi_1 + \alpha_2 \lim\tau(\mathfrak{G})\varphi_2$.
Es folgt: $(\mathfrak{Lim}\tau(\mathfrak{G}))(\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2) = \alpha_1(\mathfrak{Lim}\tau(\mathfrak{G}))\varphi_1 + \alpha_2(\mathfrak{Lim}\tau(\mathfrak{G}))\varphi_2$.
2. Sei $\mathfrak{Lim}\tau(\mathfrak{G}_1), \mathfrak{Lim}\tau(\mathfrak{G}_2) \in \mathfrak{L}_\tau(\mathcal{H})$ und $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$. Für $G_1 \in \mathfrak{G}_1$ und $G_2 \in \mathfrak{G}_2$ werde gesetzt: $\alpha_1 G_1 + \alpha_2 G_2 = \{\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 \mid A_1 \in G_1, A_2 \in G_2\}$. Dann ist $\alpha_1\mathfrak{G}_1 + \alpha_2\mathfrak{G}_2 = \{\alpha_1 G_1 + \alpha_2 G_2 \mid G_1 \in \mathfrak{G}_1, G_2 \in \mathfrak{G}_2\}$ eine Filterbasis auf $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ und es gilt $\alpha_1 \mathfrak{Lim}\tau(\mathfrak{G}_1) + \alpha_2 \mathfrak{Lim}\tau(\mathfrak{G}_2) \subseteq \mathfrak{Lim}\tau(\alpha_1\mathfrak{G}_1 + \alpha_2\mathfrak{G}_2) \in \mathfrak{L}_\tau(\mathcal{H})$.
3. Sei $A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$. Dann ist $\{\{A\}\}$ eine Filterbasis auf $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ und es gilt $A = \mathfrak{Lim}\{\{A\}\} \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$. Es folgt $\mathfrak{B}(\mathcal{H}) \subseteq \mathfrak{L}(\mathcal{H})$. Wegen 4. gilt dann auch $\mathfrak{B}(\mathcal{H}) \subset \mathfrak{L}(\mathcal{H})$.
4. Sei $H = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, d H_\lambda$ ein hermitescher Operator in $\mathcal{H}$, $F_{\gamma,\delta} = \{\int_{-\delta'}^{\delta'} \lambda \, d H_\lambda \mid \delta' > \gamma, \delta\}$ und $\mathfrak{F}_H = \{F_{\gamma,\delta} \mid \gamma, \delta > 0\}$. Dann gilt $H = \mathfrak{Lim}\,\mathfrak{F}_H \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$. Damit ist 12.3 bewiesen.

Wir betrachten einige Beispiele:

a) Hilbertsche Darstellungsräume.

Sei σ eine Darstellung von $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$ in $\mathfrak{L}(\mathcal{H}_\sigma)$ mit dem Darstellungs-Hilbertraum $\mathcal{H}_\sigma$ (5.27). Nach [7, S.253, Theorem 1] ist σ eine stetige Darstellung. $\mathfrak{L}_\sigma(\mathcal{H})$ ist eine Menge von Operatoren in $\mathcal{H}_\sigma$

b) $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$ als Darstellungsraum.

Sei $\varkappa$ bzw. ℓ die rechts- bzw. linksreguläre Darstellung von $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$ in $\mathfrak{L}(\mathfrak{L}(\mathcal{H}))$, d.h. für alle $A,\mathfrak{B} \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ gelte $(\varkappa(A))(\mathfrak{B}) = \mathfrak{B}A$, $(\ell(A))\mathfrak{B} = A\mathfrak{B}$. Nach [7, S.192, Satz I] ist ℓ ein stetiger Homomorphismus und $\varkappa$ ein stetiger Antihomomorphismus.

c) $\mathfrak{L}'(\mathcal{H})$ als Darstellungsraum

Sei $\varkappa'$ bzw. ℓ' die zu $\varkappa$ bzw. ℓ konjugierte Darstellung. Das bedeutet, $\varkappa'$ und ℓ' sind Darstellungen von $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$ in $\mathfrak{L}(\mathfrak{L}'(\mathcal{H}))$, so daß $(\varkappa'(A)f)(\mathfrak{B}) = f(\mathfrak{B}A)$ und $(\ell'(A)f)(\mathfrak{B}) = f(A\mathfrak{B})$ für alle $A,\mathfrak{B} \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ und alle $f \in \mathfrak{L}'(\mathcal{H})$ gilt. Nach [7, S.192, Satz III] ist ℓ' ein stetiger Homomorphismus und $\varkappa'$ ein stetiger Antihomomorphismus.

Den folgenden Satz erhält man unmittelbar aus 8.1, 8.3, 9.1 und 9.3:

Satz: Sei $\sigma(\mathcal{M}_1^\sigma)$ ein Modell nach 8.1, $\sigma(\mathcal{M}_2^\varphi)$ nach 8.3, $\mathcal{E}(\mathcal{M}_1^\sigma)$ nach 9.1 und $\mathcal{E}(\mathcal{M}_2^\varphi)$ nach 9.3. Es werde gesetzt:

$(H_1^\sigma(t))_{\gamma,\delta} = \{\int_{-\delta'}^{\delta'} \lambda\, d H_{1,\lambda}^\sigma(t) \mid \gamma' > \gamma, \delta' > \delta\}$, $(H_2^\varphi)_{\gamma,\delta} = \{\int_{-\delta'}^{\delta'} \lambda\, d H_{2,\lambda}^\varphi \mid \gamma' > \gamma, \delta' > \delta\}$,

$f_{j_1}^\sigma(t) = \{(H_1^\sigma(t))_{\gamma,\delta} \mid \gamma,\delta > 0\}$, $f_{j_2}^\varphi = \{(H_2^\varphi)_{\gamma,\delta} \mid \gamma,\delta > 0\}$. Dann gilt:

1. $\sigma(H_1^\sigma(t)) = \mathfrak{Lim}\, \sigma(f_{j_1}^\sigma(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda\, d\sigma(H_{1,\lambda}^\sigma(t))$ für alle $t \in \mathbb{R}$,
2. $\sigma(H_2^\varphi) = \mathfrak{Lim}\, \sigma(f_{j_2}^\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda\, d\sigma(H_{2,\lambda}^\varphi)$,
3. $\mathcal{E}(H_1^\sigma(t)) = \mathfrak{Lim}\, (\varkappa' - \ell')(f_{j_1}^\sigma(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda\, d(\varkappa' - \ell')(H_1^\sigma(t))$ für alle $t \in \mathbb{R}$,
4. $\mathcal{E}(H_2^\varphi) = \mathfrak{Lim}\, \varkappa'(f_{j_2}^\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda\, d\varkappa'(H_2^\varphi)$.

B. Verallgemeinerung der Modelle $\sigma(\mathcal{M}_2^{\mathfrak{P}})$ und $\mathcal{E}(\mathcal{M}_2^{\mathfrak{P}})$.

Mit der Bezeichnung aus Satz 12.4 gilt $H_1^{\mathfrak{P}}(t) = \mathcal{L}im\, l_{j_1}^{\mathfrak{P}}(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und $H_2^{\mathfrak{P}} = \mathcal{L}im\, l_{j_2}^{\mathfrak{P}}$. Wir können nun beliebige Filterbasen auf $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1^{\mathfrak{P}})$ bzw. $\mathcal{L}(\mathcal{H}_2^{\mathfrak{P}})$ mit dieser Eigenschaft betrachten und die Aussage von Satz 12.4 als Definition nehmen. Es ist jedoch zweckmäßig, etwas allgemeiner nur $H_1^{\mathfrak{P}}(t) \subseteq \mathcal{L}im\, l_{j_1}^{\mathfrak{P}}(t)$ und $H_2^{\mathfrak{P}} \subseteq \mathcal{L}im\, l_{j_2}^{\mathfrak{P}}$ zu verlangen. (Es genügt dann zu fordern, daß $H_1^{\mathfrak{P}}(t)$ bzw. $H_2^{\mathfrak{P}}$ eine Operator-Erweiterung in $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1^{\mathfrak{P}})$ bzw. $\mathcal{L}(\mathcal{H}_2^{\mathfrak{P}})$ besitzt.) Auf diese Weise erhalten wir Verallgemeinerungen von 8.1, 8.3, 9.1 und 9.3. Natürlich hängen nun σ-Bilder und Erweiterungen $\mathcal{E}$ im allgemeinen noch von der Wahl der Filterbasis ab. Wir bezeichnen die Modelle daher nun mit $\sigma(\mathcal{M}_1^{\mathfrak{P}}, \{l_{j_1}^{\mathfrak{P}}(t) \mid t \in \mathbb{R}\})$, $\sigma(\mathcal{M}_2^{\mathfrak{P}}, l_{j_2}^{\mathfrak{P}})$, $\mathcal{E}(\mathcal{M}_1^{\mathfrak{P}}, \{l_{j_1}^{\mathfrak{P}}(t) \mid t \in \mathbb{R}\})$ und $\mathcal{E}(\mathcal{M}_2^{\mathfrak{P}}, l_{j_2}^{\mathfrak{P}})$, wollen jedoch nur die zu $\mathfrak{P}$ gehörigen Modelle genauer betrachten.

12.5 Definition: Sei $\mathfrak{P}$ ein physikalisches System mit Zeitmessung, $\mathcal{M}_2^{\mathfrak{P}} = (\mathcal{H}_2^{\mathfrak{P}}, \mathcal{R}_2^{\mathfrak{P}}, H_2^{\mathfrak{P}}, \mathcal{D}_2^{\mathfrak{P}})$ ein dazugehöriges modifiziertes übliches Modell, so, daß eine Filterbasis $l_{j_2}^{\mathfrak{P}}$ auf $\mathcal{L}(\mathcal{H}_2^{\mathfrak{P}})$ mit $H_2^{\mathfrak{P}} \subseteq \mathcal{L}im\, l_{j_2}^{\mathfrak{P}}$ existiert und σ eine Darstellung von $\mathcal{L}(\mathcal{H}_2^{\mathfrak{P}})$ in $\mathcal{L}(\mathcal{H}_{2,\sigma}^{\mathfrak{P}})$ mit dem Darstellungs-Hilbertraum $\mathcal{H}_{2,\sigma}^{\mathfrak{P}}$ so, daß $\sigma(I_{\mathcal{H}_2^{\mathfrak{P}}}) = I_{\mathcal{H}_{2,\sigma}^{\mathfrak{P}}}$ gilt. Sei $\nu'\colon \mathcal{L}(\mathcal{H}_2^{\mathfrak{P}}) \to \mathcal{L}(\mathcal{L}'(\mathcal{H}_2^{\mathfrak{P}}))$ so, daß $(\nu'(A)f)(B) = f(BA)$ für alle $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2^{\mathfrak{P}})$ und alle $f \in \mathcal{L}'(\mathcal{H}_2^{\mathfrak{P}})$ gilt.

Es sei:

1. $\sigma(\mathcal{H}_2^{\mathfrak{P}}) = \mathcal{H}_{2,\sigma}^{\mathfrak{P}}$,
   $\mathcal{E}(\mathcal{H}_2^{\mathfrak{P}}) = \mathcal{H}_2^{\mathfrak{P}}$,
2. $(\sigma(\mathcal{R}_2^{\mathfrak{P}}))(E) = \sigma(\mathcal{R}_2^{\mathfrak{P}}(E))$ für alle $E \in \mathfrak{P}$,
   $\mathcal{E}(\mathcal{R}_2^{\mathfrak{P}}) = \mathcal{R}_2^{\mathfrak{P}}$,
3. $\sigma(H_2^{\mathfrak{P}}, l_{j_2}^{\mathfrak{P}}) = \mathcal{L}im\, \sigma(l_{j_2}^{\mathfrak{P}})$,
   $\mathcal{E}(H_2^{\mathfrak{P}}, l_{j_2}^{\mathfrak{P}}) = \mathcal{L}im\, \nu'(l_{j_2}^{\mathfrak{P}})$,
4. $\sigma(\mathcal{D}_2^{\mathfrak{P}})$: "Jeder Vektor $\varphi \in \sigma(\mathcal{H}_1^{\mathfrak{P}})$ so, daß $\sigma(H_2^{\mathfrak{P}}, l_{j_2}^{\mathfrak{P}})\varphi = \sigma$

und $\|\varphi\| = 1$ gilt, heisse ein Zustand von $\mathfrak{P}$ im Modell $\sigma(\mathcal{M}_2^{\mathfrak{P}}, \mathfrak{f}_2^{\mathfrak{P}})$. Für alle $E \in \mathfrak{P}$ sei $\omega_\varphi(E) = (\sigma(\mathcal{R}_2^{\mathfrak{P}}(E))\varphi, \varphi)$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine Messung von E im Zustand φ das Ergebnis 1 liefert." $\mathcal{E}(\mathcal{D}_2^{\mathfrak{P}})$: "Jedes positive Funktional $\varrho \in \mathfrak{S}'(\mathcal{H}_2^{\mathfrak{P}})$ so, daß $\mathcal{E}(H_2^{\mathfrak{P}}, \mathfrak{f}_2^{\mathfrak{P}})\varrho = \mathcal{O}$ und $\|\varrho\| = 1$ gilt, heiße ein Zustand von $\mathfrak{P}$ im Modell $\mathcal{E}(\mathcal{M}_2^{\mathfrak{P}}, \mathfrak{f}_2^{\mathfrak{P}})$. Für alle $E \in \mathfrak{P}$ sei $\omega_\varrho(E) = \varrho(\mathcal{R}_2^{\mathfrak{P}}(E))$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine Messung von E im Zustand ϱ das Ergebnis 1 liefert."

Dann heiße das Quadrupel $\sigma(\mathcal{M}_2^{\mathfrak{P}}, \mathfrak{f}_2^{\mathfrak{P}}) = (\sigma(\mathcal{H}_2^{\mathfrak{P}}), \sigma(\mathcal{R}_2^{\mathfrak{P}}), \sigma(H_2^{\mathfrak{P}}, \mathfrak{f}_2^{\mathfrak{P}}), \sigma(\mathcal{D}_2^{\mathfrak{P}}))$ das <u>σ-Bild</u> von $(\mathcal{M}_2^{\mathfrak{P}}, \mathfrak{f}_2^{\mathfrak{P}})$ und das Quadrupel $\mathcal{E}(\mathcal{M}_2^{\mathfrak{P}}, \mathfrak{f}_2^{\mathfrak{P}}) = (\mathcal{E}(\mathcal{H}_2^{\mathfrak{P}}), \mathcal{E}(\mathcal{R}_2^{\mathfrak{P}}), \mathcal{E}(H_2^{\mathfrak{P}}, \mathfrak{f}_2^{\mathfrak{P}}), \mathcal{E}(\mathcal{D}_2^{\mathfrak{P}}))$ die <u>Erweiterung</u> von $(\mathcal{M}_2^{\mathfrak{P}}, \mathfrak{f}_2^{\mathfrak{P}})$.

Wie in § 9 kann gezeigt werden, daß $\mathcal{E}(\mathcal{M}_2^{\mathfrak{P}}, \mathfrak{f}_2^{\mathfrak{P}})$ umfassender ist als sämtliche σ-Bilder $\sigma(\mathcal{M}_2^{\mathfrak{P}}, \mathfrak{f}_2^{\mathfrak{P}})$ zusammen.

C. <u>Praktische Durchführung der Konstruktion</u>

Sei $\mathfrak{P}$ ein physikalisches System mit Zeitmessung und $\mathcal{M}_2^{\mathfrak{P}} = (\mathcal{H}_2^{\mathfrak{P}}, \mathcal{R}_2^{\mathfrak{P}}, H_2^{\mathfrak{P}}, \mathcal{D}_2^{\mathfrak{P}})$ ein modifiziertes übliches Modell so, daß $H_2^{\mathfrak{P}}$ in $\mathfrak{L}(\mathcal{H}_2^{\mathfrak{P}})$ eine Operator-Erweiterung besitzt. Sei $\mathfrak{f}_2^{\mathfrak{P}}$ eine Filterbasis auf $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_2^{\mathfrak{P}})$ mit $H_2^{\mathfrak{P}} \subseteq \mathfrak{L}\lim \mathfrak{f}_2^{\mathfrak{P}}$. Dann wähle man das Modell $\mathcal{E}(\mathcal{M}_2^{\mathfrak{P}}, \mathfrak{f}_2^{\mathfrak{P}})$ (12.5) als Ansatz für ein Modell der Quantenmechanik mit Zeitoperator:

$$\mathcal{M}^{\mathfrak{P}} = \mathcal{E}(\mathcal{M}_2^{\mathfrak{P}}, \mathfrak{f}_2^{\mathfrak{P}}).$$

Bei der Konstruktion von $\mathcal{M}_2^{\mathfrak{P}}$ und $\mathfrak{f}_2^{\mathfrak{P}}$ kann man folgendermaßen vorgehen:

a) Um ein Modell $\mathcal{M}_2^{\mathfrak{P}} = (\mathcal{H}_2^{\mathfrak{P}}, \mathcal{R}_2^{\mathfrak{P}}, H_2^{\mathfrak{P}}, \mathcal{D}_2^{\mathfrak{P}})$ zu konstruieren, geht man nach § 7, B, von einem zu $\mathfrak{P}$ gehörigen Modell $\mathcal{M}_0^{\mathfrak{P}}$ der klassischen Mechanik mit einer zeitunabhängigen Hamiltonfunktion $H_0^{\mathfrak{P}}$ aus und setzt:

$\mathcal{H}_2^{\mathfrak{f}} = L^2(\mathbb{R}_{f^{\mathfrak{f}}})$, $H_2^{\mathfrak{f}} = Op(H_0^{\mathfrak{f}}) = H_2^{\mathfrak{f}}(x_{1\bullet}, \ldots, x_{f^{\mathfrak{f}}\bullet}, \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_{f^{\mathfrak{f}}}})$.

Die $\mathcal{R}_2^{\mathfrak{f}}$-Bilder der kanonischen Observablen $\{E_\lambda^\nu \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ und $\{F_\lambda^\nu \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ von $\mathfrak{f}$ sind gemäß 7.1, 2.c, durch $\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, d\mathcal{R}_2^{\mathfrak{f}}(E_\lambda^\nu) = x_{\nu\bullet}$ und $\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, d\mathcal{R}_2^{\mathfrak{f}}(F_\lambda^\nu) = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_\nu}$ bestimmt $(\nu = 1, 2, \ldots, f^{\mathfrak{f}})$. Auf eine weitere Konstruktion von $\mathcal{R}_2^{\mathfrak{f}}$ kann häufig verzichtet werden.

Meist geht man nicht von $\mathfrak{f}$, sondern von einem System $\mathfrak{o} \subseteq \mathfrak{f}$ (mit $f^{\mathfrak{o}} = f^{\mathfrak{f}} - 1$ und den kanonischen Observablen $\{E_\lambda^\nu \mid \lambda \in \mathbb{R}\}, \{F_\lambda^\nu \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ für $\nu = 1, 2, \ldots, f^{\mathfrak{f}} - 1$) und einem zu $\mathfrak{o}$ gehörigen Modell $\mathcal{M}_0^{\mathfrak{o}}$ der klassischen Mechanik aus. Sei $\{H_0^{\mathfrak{o}}(t) \mid t \in \mathbb{R}\} \in \mathcal{M}_0^{\mathfrak{o}}$. Dann erhält man nach § 3 eine Hamiltonfunktion $H_0^{\mathfrak{f}}$ eines zu $\mathfrak{f}$ gehörigen Modells $\mathcal{M}_0^{\mathfrak{f}}$ durch die Festsetzung $H_0^{\mathfrak{f}}(q_1, \ldots, q_{f^{\mathfrak{f}}}, p_1, \ldots, p_{f^{\mathfrak{f}}}) = (H_0^{\mathfrak{o}}(q_{f^{\mathfrak{o}}}))(q_1, \ldots, q_{f^{\mathfrak{f}}-1}, p_1, \ldots, p_{f^{\mathfrak{f}}-1}) + p_{f^{\mathfrak{f}}}$ für alle $(q_1, \ldots, q_{f^{\mathfrak{f}}}, p_1, \ldots, p_{f^{\mathfrak{f}}}) \in \mathbb{R}_{2f^{\mathfrak{f}}}$. In diesem Fall ist $H_2^{\mathfrak{f}} = Op(H_0^{\mathfrak{f}})$ $= (H_0^{\mathfrak{o}}(x_{f^{\mathfrak{o}}\bullet}))(x_{1\bullet}, \ldots, x_{f^{\mathfrak{f}}-1\bullet}, \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_{f^{\mathfrak{f}}-1}}) + \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_{f^{\mathfrak{f}}}}$ zu setzen.

b) Die Konstruktion einer Filterbasis $\mathfrak{l}_{\mathfrak{f}2}$ auf $\mathfrak{L}(\mathcal{H}_2^{\mathfrak{f}})$ mit $H_2^{\mathfrak{f}} \subseteq \mathfrak{Lim}\, \mathfrak{l}_{\mathfrak{f}2}$ bereitet im allgemeinen keine Schwierigkeiten. Meist kann $H_2^{\mathfrak{f}} \in \mathcal{M}_2^{\mathfrak{f}}$ ohne weiteres auf folgende Gestalt gebracht werden: $H_2^{\mathfrak{f}} = \sum_{\nu=1}^{m} \alpha_\nu \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, dH_{2,\nu,\lambda}^{\mathfrak{f}}$ $(\alpha_\nu \in \mathbb{C}, \nu = 1, \ldots, m)$. Nach Satz 12.3, 4. und 2. hat dann $H_2^{\mathfrak{f}}$ in $\mathfrak{L}(\mathcal{H}_2^{\mathfrak{f}})$ eine Operator-Erweiterung. Mit $(H_2^{\mathfrak{f}})_{\gamma,\delta} = \{\sum_{\nu=1}^{m} \alpha_\nu \int_{-\gamma'}^{\delta'} \lambda \, dH_{2,\nu,\lambda}^{\mathfrak{f}} \mid \gamma' > \gamma, \delta' > \delta\}$ und $\mathfrak{l}_{\mathfrak{f}2} = \{(H_2^{\mathfrak{f}})_{\gamma,\delta} \mid \gamma, \delta > 0\}$ ist $\mathfrak{l}_{\mathfrak{f}2}$ eine Filterbasis auf $\mathfrak{L}(\mathcal{H}_2^{\mathfrak{f}})$ und es gilt $H_2^{\mathfrak{f}} \subseteq \mathfrak{Lim}\, \mathfrak{l}_{\mathfrak{f}2}$.

Die Konstruktion von $\mathfrak{E}(\mathcal{M}_2^{\mathfrak{f}}, \mathfrak{l}_{\mathfrak{f}2})$ kann dann nach 12.5 erfolgen.

§ 13 Die Heisenbergschen Unschärferelationen

Die bekannten Heisenbergschen Unschärferelationen (2.13) eines üblichen Modells der Quantenmechanik sind eine Folge der Vertauschungsrelationen (2.6) für die Operatoren der Orts- und Impulskoordinaten. Den entsprechenden Relationen genügen in einem Modell der Quantenmechanik mit Zeitoperator die Operatoren der Orts- und Impulskoordinaten sowie der Zeit-

und Energieoperator. Daher erhalten wir in einem solchen Modell auch entsprechende Unschärferelationen. Diese werden sich auf Ort, Impuls, Zeit und Energie beziehen.

Satz: Sei $\mathcal{M}^{\mathfrak{f}}$ ein Modell der Quantenmechanik mit Zeitoperator und φ ein normierter Vektor aus $\mathcal{H}^{\mathfrak{f}} \in \mathcal{M}^{\mathfrak{f}}$, der im Definitionsbereich von $(T_\nu^{\mathfrak{f}})^2$, $(Q_\nu^{\mathfrak{f}})^2$ und $T_\nu^{\mathfrak{f}} Q_\nu^{\mathfrak{f}} - Q_\nu^{\mathfrak{f}} T_\nu^{\mathfrak{f}}$ für $\nu = 1,2,\dots,f^{\mathfrak{f}}$ liegt. Sei $f_\varphi \in \mathfrak{F}(\mathcal{H}^{\mathfrak{f}})$ (§ 11) ein Zustand von $\mathfrak{f}$ in $\mathcal{M}^{\mathfrak{f}}$. Es bezeichne $s_{f_\varphi}(Q_\nu^{\mathfrak{f}})$ bzw. $s_{f_\varphi}(T_\nu^{\mathfrak{f}})$ für $\nu = 1,2,\dots,f^{\mathfrak{f}}-1$ die Streuung der Observablen der ν-ten Orts- bzw. Impulskoordinate und für $\nu = f^{\mathfrak{f}}$ die Streuung der Zeit- bzw. Energieobservable im Zustand f_φ (10.5).

Dann gilt: $$\sqrt{s_{f_\varphi}(Q_\nu^{\mathfrak{f}})} \cdot \sqrt{s_{f_\varphi}(T_\nu^{\mathfrak{f}})} \geq \frac{\hbar}{2} \qquad (\nu = 1,2,\dots,f^{\mathfrak{f}}).$$

Beweis: Wir setzen $\tilde{T}_\nu^{\mathfrak{f}} = T_\nu^{\mathfrak{f}} - \mu_{f_\varphi}(T_\nu^{\mathfrak{f}}) I_{\mathcal{H}^{\mathfrak{f}}}$ und $\tilde{Q}_\nu^{\mathfrak{f}} = Q_\nu^{\mathfrak{f}} - \mu_{f_\varphi}(Q_\nu^{\mathfrak{f}}) I_{\mathcal{H}^{\mathfrak{f}}}$ mit μ_{f_φ} nach 10.5 und erhalten unter den Voraussetzungen des Satzes analog zu 2.13 für $\nu = 1,2,\dots,f^{\mathfrak{f}}$ die Abschätzung: $\sqrt{s_{f_\varphi}(Q_\nu^{\mathfrak{f}})}\sqrt{s_{f_\varphi}(T_\nu^{\mathfrak{f}})} = \sqrt{((\tilde{Q}_\nu^{\mathfrak{f}})^2\varphi,\varphi)((\tilde{T}_\nu^{\mathfrak{f}})^2\varphi,\varphi)} = \sqrt{(\tilde{Q}_\nu^{\mathfrak{f}}\varphi,\tilde{Q}_\nu^{\mathfrak{f}}\varphi)(\tilde{T}_\nu^{\mathfrak{f}}\varphi,\tilde{T}_\nu^{\mathfrak{f}}\varphi)} = \|\tilde{Q}_\nu^{\mathfrak{f}}\varphi\|\,\|\tilde{T}_\nu^{\mathfrak{f}}\varphi\| \geq |(\tilde{Q}_\nu^{\mathfrak{f}}\varphi,\tilde{T}_\nu^{\mathfrak{f}}\varphi)| \geq \frac{1}{2}|(\tilde{T}_\nu^{\mathfrak{f}}\varphi,\tilde{Q}_\nu^{\mathfrak{f}}\varphi) - (\tilde{Q}_\nu^{\mathfrak{f}}\varphi,\tilde{T}_\nu^{\mathfrak{f}}\varphi)| = \frac{1}{2}|(\varphi,(\tilde{T}_\nu\tilde{Q}_\nu - \tilde{Q}_\nu\tilde{T}_\nu)\varphi)| = \frac{1}{2}|(\varphi,\tfrac{\hbar}{i}\varphi)| = \frac{\hbar}{2}|(\varphi,\varphi)| = \frac{\hbar}{2}$. Damit ist Satz 13.1 bewiesen.

Es zeigt sich, daß die Voraussetzung für die Gültigkeit der Unschärferelationen (13.1) für ein Modell mit Zeitoperator eine sehr weitgehende Einschränkung bedeutet. Eine einschneidende Bedingung bedeutet nämlich die Beschränkung auf die Zustände aus $\mathfrak{F}(\mathcal{H}^{\mathfrak{f}})$. Bei der Herleitung der Modelle mit Zeitoperator erwies sich ja gerade, daß $\mathfrak{F}(\mathcal{H}^{\mathfrak{f}})$ als Raum der Zustände nicht ausreicht. Die weitere Voraussetzung bezüglich der Definitionsbereiche von $(T_\nu^{\mathfrak{f}})^2$, $(Q_\nu^{\mathfrak{f}})^2$, $T_\nu^{\mathfrak{f}} Q_\nu^{\mathfrak{f}} - Q_\nu^{\mathfrak{f}} T_\nu^{\mathfrak{f}}$ $(\nu = 1,2,\dots,f^{\mathfrak{f}})$ ist dagegen nicht wesentlich, da der Durchschnitt der Definitionsbereiche der angegebenen Operatoren in $\mathcal{H}^{\mathfrak{f}}$ dicht liegt (das folgt unmittelbar

aus der Darstellung als Differentiations- und Multiplikationsoperatoren). Aus diesem Grund gelten die Heisenbergschen Unschärferelationen (2.13) für ein übliches Modell der Quantenmechanik praktisch für alle Zustände.

Die Unschärferelationen (13.1) sind daher für unsere Modelle von geringer praktischer Bedeutung. Wir werden im nächsten Paragraphen Unschärfeaussagen für ein Modell mit Zeitoperator gewinnen, die für alle Zustände gültig sind.

§ 14. Unschärfeaussagen für Modelle mit Zeitoperator

Sei $\mathfrak{F}$ ein physikalisches System und $\mathcal{M}^{\mathfrak{F}} = (\mathcal{H}^{\mathfrak{F}}, \mathcal{R}^{\mathfrak{F}}, H^{\mathfrak{F}}, \mathcal{D}^{\mathfrak{F}})$ ein dazugehöriges Modell der Quantenmechanik mit Zeitoperator. Für diesen Paragraphen soll das Modell $\mathcal{M}^{\mathfrak{F}}$ festgehalten werden. Wir setzen daher $\mathcal{M} = \mathcal{M}^{\mathfrak{F}}$, $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{\mathfrak{F}}$, $\mathcal{R} = \mathcal{R}^{\mathfrak{F}}$, $H = H^{\mathfrak{F}}$, $m = f^{\mathfrak{F}}$, $Q_\nu = Q_\nu^{\mathfrak{F}}$ und $T_\nu = T_\nu^{\mathfrak{F}}$ für $\nu = 1, 2, \ldots, m$. Es bezeichne V eine Isometrie von $\mathcal{H}$ auf $L^2(\mathcal{R}_m)$ mit $Q_\nu = V^{-1}\hat{(}x_\nu \cdot\hat{)}\, V$ und $T_\nu = V^{-1}\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_\nu} V$ für $\nu = 1, 2, \ldots, m$ (10.1) und T den Fourier-Plancherd-Operator (2.7) in $L^2(\mathcal{R}_m)$.

Wir wollen Unschärfeaussagen über die Messung des Ortes, der Zeit, des Impulses und der Energie herleiten, die in jedem Zustand von $\mathfrak{F}$ im Modell $\mathcal{M}$ gültig sind. Sei φ ein Zustand von $\mathfrak{F}$ in $\mathcal{M}$. Dann existiert nach 5.31 und 5.32 eine Darstellung δ_φ von $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$ in $\mathfrak{L}(\mathcal{H}_{\delta_\varphi})$ und ein Vektor $\varphi \in \mathcal{H}_{\delta_\varphi}$ so, daß $\varphi = f_\varphi$ mit $f_\varphi : A \to (\delta_\varphi(A)\varphi, \varphi)$ gilt. Wenn die Operatoren $\delta_\varphi(Q_\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, d\delta_\varphi(R(E_\lambda^\nu))$ und $\delta_\varphi(T_\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, d\delta_\varphi(R(F_\lambda^\nu))$ für $\nu = 1, 2, \ldots, m$ den gleichen Vertauschungsrelationen genügen würden, wie Q_ν, T_ν und φ im Definitionsbereich von $(\delta_\varphi(Q_\nu))^2$, $(\delta_\varphi(T_\nu))^2$, $\delta_\varphi(T_\nu)\delta_\varphi(Q_\nu) - \delta_\varphi(Q_\nu)\delta_\varphi(T_\nu)$ liegen würde, dann könnte die Gültigkeit von 13.1 auf den Zustand φ ausgedehnt werden. Es würde gelten: $\sqrt{s_\varphi(Q_\nu)}\sqrt{s_\varphi(T_\nu)} \geq \frac{\hbar}{2}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, m)$. Es zeigt sich jedoch, daß nicht notwendig für jede Darstellung δ von $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$ in $\mathfrak{L}(\mathcal{H}_\delta)$ die Relationen $\delta(T_\mu)\delta(Q_\nu) - \delta(Q_\nu)\delta(T_\mu) \subseteq \frac{\hbar}{i}\delta_{\mu\nu}\mathsf{I}_{\mathcal{H}}$ $(\mu, \nu = 1, \ldots, m)$ gültig sind. Daher kann 13.1 nicht ohne weiteres auf alle Zustände von $\mathfrak{F}$ in $\mathcal{M}$ ausgedehnt werden.

Um Unschärfeaussagen zu erhalten, die für alle Zustände von $\mathfrak{H}$ in $\mathcal{M}$ gelten, ist es daher naheliegend, anstelle der Relationen 10.3 andere Relationen für Q_ν, P_ν $(\nu = 1, \dots, m)$ zu verwenden, die auf jeden Darstellungsraum $\mathfrak{H}_\delta$ von $\mathfrak{H}$ übertragen werden können.

A. Relationen für $Q_1, \dots, Q_m, P_1, \dots, P_m$

Die Relationen, die wir anstelle von 13.1 zur Herleitung von Unschärfeaussagen verwenden wollen, werden in [4, S.110] erwähnt. Wir erhalten sie durch den folgenden Satz 14.1.

Sei $\gamma \in \mathbb{R}$. Dann setzen wir $e^{\frac{i}{\hbar}\gamma Q_\nu} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{i}{\hbar}\gamma\lambda}\, d\mathcal{R}(E_\lambda^\nu)$ und $e^{\frac{i}{\hbar}\gamma P_\nu} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{i}{\hbar}\gamma\lambda}\, d\mathcal{R}(F_\lambda^\nu)$ für $\nu = 1, 2, \dots, m$ (5.15).

14.1 Satz: Es seien $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_m$ reelle Zahlen. Dann gilt:

$$e^{\frac{i}{\hbar}\alpha_1 Q_1} \cdot \dots \cdot e^{\frac{i}{\hbar}\alpha_m Q_m} \cdot e^{\frac{i}{\hbar}\beta_1 P_1} \cdot \dots \cdot e^{\frac{i}{\hbar}\beta_m P_m} =$$
$$= e^{\frac{i}{\hbar}(\alpha_1\beta_1 + \dots + \alpha_m\beta_m)} e^{\frac{i}{\hbar}\beta_1 P_1} \cdot \dots \cdot e^{\frac{i}{\hbar}\beta_m P_m} \cdot e^{\frac{i}{\hbar}\alpha_1 Q_1} \cdot \dots \cdot e^{\frac{i}{\hbar}\alpha_m Q_m}.$$

Beweis: Aus $V Q_\nu V^{-1} = x_\nu \cdot$ und $V P_\nu V^{-1} = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_\nu}$ folgt $V e^{\frac{i}{\hbar}\alpha_\nu Q_\nu} V^{-1} = e^{\frac{i}{\hbar}\alpha_\nu x_\nu} \cdot$ und $T V e^{\frac{i}{\hbar}\beta_\nu P_\nu} V^{-1} T^{-1} = e^{\frac{i}{\hbar}\beta_\nu x_\nu} \cdot$ $(\nu = 1, 2, \dots, m)$. Die Integraldarstellung 2.7 von T zeigt unmittelbar, daß der Operator $T^{-1} e^{\frac{i}{\hbar}\beta_\nu x_\nu} \cdot T$ für $\nu = 1, 2, \dots, m$ die "Verschiebung" um $-\beta_\nu$ ist: Für $\nu = 1, 2, \dots, m$, $\varphi \in L^2(\mathbb{R}_m)$ und $(\gamma_1, \dots, \gamma_m) \in \mathbb{R}_m$ gilt $(T^{-1} e^{\frac{i}{\hbar}\beta_\nu x_\nu} \cdot T\varphi)(\gamma_1, \dots, \gamma_m) = \varphi(\gamma_1, \dots, \gamma_{\nu-1}, \gamma_\nu - \beta_\nu, \gamma_{\nu+1}, \dots, \gamma_m)$. Dann erhalten wir für alle $\varphi \in L^2(\mathbb{R}_m)$ und alle $(\gamma_1, \dots, \gamma_m) \in \mathbb{R}_m$: $(V e^{\frac{i}{\hbar}(\alpha_1\beta_1 + \dots + \alpha_m\beta_m)} e^{\frac{i}{\hbar}\beta_1 P_1} \cdot \dots \cdot e^{\frac{i}{\hbar}\beta_m P_m} \cdot e^{\frac{i}{\hbar}\alpha_1 Q_1} \cdot \dots \cdot e^{\frac{i}{\hbar}\alpha_m Q_m} V^{-1}\varphi)(\gamma_1, \dots, \gamma_m) = (e^{\frac{i}{\hbar}(\alpha_1\beta_1 + \dots + \alpha_m\beta_m)} T^{-1} e^{\frac{i}{\hbar}(\beta_1 x_1 + \dots + \beta_m x_m)} \cdot T$ $e^{\frac{i}{\hbar}(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_m x_m)} \cdot \varphi)(\gamma_1, \dots, \gamma_m) = e^{\frac{i}{\hbar}(\alpha_1\beta_1 + \dots + \alpha_m\beta_m)} e^{\frac{i}{\hbar}(\alpha_1(\gamma_1 - \beta_1) + \dots + \alpha_m(\gamma_m - \beta_m))} \cdot$ $\varphi(\gamma_1 - \beta_1, \dots, \gamma_m - \beta_m) = e^{\frac{i}{\hbar}(\alpha_1\gamma_1 + \dots + \alpha_m\gamma_m)} \varphi(\gamma_1 - \beta_1, \dots, \gamma_m - \beta_m) = e^{\frac{i}{\hbar}(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_m x_m)} \cdot$ $T^{-1} e^{\frac{i}{\hbar}(\beta_1 x_1 + \dots + \beta_m x_m)} \cdot T\varphi)(\gamma_1, \dots, \gamma_m) = (V e^{\frac{i}{\hbar}\alpha_1 Q_1} \cdot \dots \cdot e^{\frac{i}{\hbar}\alpha_m Q_m} \cdot e^{\frac{i}{\hbar}\beta_1 P_1} \cdot \dots$ $\dots \cdot e^{\frac{i}{\hbar}\beta_m P_m} V^{-1} \varphi)(\gamma_1, \dots, \gamma_m)$.

Damit ist Satz 14.1 bewiesen.

Die Operatoren $e^{\frac{i}{\hbar}\alpha_1 Q_1} \cdots e^{\frac{i}{\hbar}\alpha_m Q_m} e^{\frac{i}{\hbar}\beta_1 P_1} \cdots e^{\frac{i}{\hbar}\beta_m P_m}$ **aus 14.1 sind offensichtlich unitär und daher in** $\mathfrak{S}'(\mathcal{H})$ **enthalten. Daher können die Relationen 14.1 für jede Darstellung** σ **von** $\mathfrak{S}'(\mathcal{H})$ **in** $\mathfrak{S}'(\mathcal{H}_\sigma)$ **auf den Darstellungsraum** $\mathcal{H}_\sigma$ **übertragen werden. Es gilt:**

$$\sigma(e^{\frac{i}{\hbar}\alpha_1 Q_1}) \cdots \sigma(e^{\frac{i}{\hbar}\alpha_m Q_m})\, \sigma(e^{\frac{i}{\hbar}\beta_1 P_1}) \cdots \sigma(e^{\frac{i}{\hbar}\beta_m P_m}) =$$
$$e^{\frac{i}{\hbar}(\alpha_1\beta_1 + \cdots + \alpha_m\beta_m)}\, \sigma(e^{\frac{i}{\hbar}\beta_1 P_1}) \cdots \sigma(e^{\frac{i}{\hbar}\beta_m P_m})\, \sigma(e^{\frac{i}{\hbar}\alpha_1 Q_1}) \cdots \sigma(e^{\frac{i}{\hbar}\alpha_m Q_m}).$$

Wir können daher annehmen, daß jede Unschärfeaussage, die wir aus den Relationen 14.1 gewinnen, für sämtliche Zustände von $\mathfrak{F}$ **in** $\mathcal{M}$ **gültig ist. Um solche Aussagen herleiten zu können, untersuchen wir die**

B. Physikalische Bedeutung der Operatoren $e^{\frac{i}{\hbar}\alpha_\nu Q_\nu}, e^{\frac{i}{\hbar}\beta_\nu P_\nu}$ $(\alpha_\nu, \beta_\nu \in \mathbb{R},$ $\nu = 1, 2, \ldots, m)$

An dieser Stelle benötigen wir eine Verallgemeinerung des Begriffes "Meßwert"(10.7). Wir wollen uns mit einer Skizzierung begnügen.

Sei $\mathfrak{L} = \{E_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ eine Observable von $\mathfrak{F}$ und $C = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, d\mathcal{R}(E_\lambda)$ der zugehörige hermitesche Operator in $\mathcal{H}$. Wir setzen hier weiter voraus, daß die Schar $\lambda \to \mathcal{R}(E_\lambda)$ rechtsseitig stetig ist: Für alle $\varphi \in \mathcal{H}$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gelte $\mathcal{R}(E_{\lambda+0})\,\varphi = \mathcal{R}(E_\lambda)\,\varphi$ (Diese Voraussetzung ist für die Scharen $\{E_\lambda^\nu \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$, $\{F_\lambda^\nu \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, f^{\mathfrak{F}})$ wegen 10.1, 2 c, erfüllt; diese Scharen sind sogar stetig.)

Die Schar $\{\mathcal{R}(E_\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ bestimmt dann in bekannter Weise ein Spektralmaß S_C auf $\mathbb{R}$ so, daß $\mathcal{R}(E_\lambda) = S_C(\Delta_\lambda)$ $(\Delta_\lambda = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \lambda\})$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt [4, Kap III, § 4]. Es ist S_C eine Abbildung der Borelschen Mengenfamilie Σ von $\mathbb{R}$ in die Menge der Projektionsoperatoren von $\mathcal{H}$. Man erhält S_C durch Fortsetzung der auf den Intervallen $(\lambda, \lambda'] \subseteq \mathbb{R}$ gegebenen Abbildung $(\lambda, \lambda'] \to \mathcal{R}(E_{\lambda'}) - \mathcal{R}(E_\lambda)$ auf ganz Σ. Wir setzen $\mathfrak{Y}_C = \{S_C(\Delta) \mid \Delta \in \Sigma\}$, $\mathcal{R}^{-1}(\mathfrak{Y}_C) = \{E \in \mathfrak{F} \mid \mathcal{R}(E) \in \mathfrak{Y}_C\}$.

Es gilt $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{R}^{-1}(\mathcal{S}_C)$. Jeder Messung M von $\mathcal{L}$ ist eindeutig ein Messwert $\lambda_M \in \mathbb{R}$ zugeordnet (10.7). Der Messwert λ_M ist (gleichwertig mit 10.7) auch durch folgende Bedingung festgelegt : Für jedes $\Delta \in \Sigma$ gilt $\lambda_M \in \Delta$ genau dann, wenn ein $E \in \mathcal{L}$ mit $\mathcal{R}(E) = \mathcal{S}_C(\Delta)$ existiert und E durch M bestätigt worden ist. Diese Festsetzung kann auch noch dann verwendet werden, wenn anstelle von $\mathcal{L}$ eine beliebige Teilmenge $\mathcal{L}_C \subseteq \mathcal{R}^{-1}(\mathcal{S}_C)$ betrachtet wird. Dann ist allerdings λ_M nicht mehr notwendig eindeutig bestimmt. Stattdessen ist eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ bestimmt. Das wird plausibel, wenn man etwa $\mathcal{L}_C \subset \mathcal{L}$ wählt. Dann verzichtet man bei einer Messung von $\mathcal{L}_C$ auf Informationen, die zur Festlegung des Messwertes für $\mathcal{L}$ erforderlich wären. Einer Messung M von $\mathcal{L}_C$ kann jedoch eindeutig eine Teilmenge $\ell_M \subseteq \mathbb{R}$ zugeordnet werden. In Verallgemeinerung von "Messwert" bezeichnen wir ℓ_M als Messwertmenge der Messung M.

Sei $\mathcal{L}_C \subseteq \mathcal{R}^{-1}(\mathcal{S}_C)$, M eine Messung von $\mathcal{L}_C$ und $\ell_M \subseteq \mathbb{R}$ so, dass für jedes $\Delta \in \Sigma$ gilt $\ell_M \subseteq \Delta$ genau dann, wenn ein $E \in \mathcal{L}_C$ mit $\mathcal{R}(E) = \mathcal{S}_C(\Delta)$ existiert und E durch M bestätigt worden ist. Dann wollen wir sagen, dass der Messwert für die Observable $\mathcal{L}$ (oder kurz die Observable $\mathcal{L}$) durch M bis auf ℓ_M bestimmt sei. Es heisse ℓ_M die Messwertmenge der Messung M.

Alle möglichen Messwerte für $\mathcal{L}$ bilden das Spektrum $s(C)$ von C und alle möglichen Messwertmengen für $\mathcal{L}_C$ bilden ein System von elementenfremden Teilmengen von $s(C)$.

Sei g eine stetige beschränkte auf $\mathbb{R}$ definierte reellwertige Funktion, $g(C) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda)\, d\, R(E_\lambda)$ und $\Delta_\lambda^g = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \leq \lambda\}$. Dann ist $g(s(C)) = \{g(s) \mid s \in s(C)\}$ das Spektrum von $g(C)$. Weiter gilt $g(C) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Aus der Darstellung von $\int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda)\, d\, R(E_\lambda)$ als Limes von Integralsummen (analog zu [7, S. 147]) folgt unmittelbar die Beziehung $\int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda)\, d\, R(E_\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda\, d\, S_c(\Delta_\lambda^g)$.

Daher gilt $\mathcal{G}_{\gamma(C)} \subseteq \mathcal{G}_C$. Sei $\mathcal{L}_\gamma = \{E_{\gamma,\lambda} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ eine Observable von $\mathcal{H}$ so, daß $\gamma(C) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, d\mathcal{R}(E_{\gamma,\lambda})$ gilt. Jedes $\gamma(s)$ mit $s \in s(C)$ ist ein möglicher Meßwert für $\mathcal{L}_\gamma$. Es gilt $\mathcal{L}_\gamma \subseteq \mathcal{R}^{-1}(\mathcal{G}_{\gamma(C)})$. Durch eine Messu von $\mathcal{R}^{-1}(\mathcal{G}_{\gamma(C)})$ ist daher eindeutig ein Meßwert $\gamma(s)$ $(s \in s(C))$ für $\mathcal{L}_\gamma$ festgelegt. Dann ist s , der Meßwert für $\mathcal{L}$, eindeutig bestimmt nur bis auf einen Wert aus der Urbildmenge von $\gamma(s)$. Also hat jede mögliche Meßwertmenge für $\mathcal{R}^{-1}(\mathcal{G}_{\gamma(C)}) \subseteq \mathcal{R}^{-1}(\mathcal{G}_C)$ die Form $\gamma^{-1}(\{\gamma(s)\}) = \{x \in \mathbb{R} \mid \gamma(x) = \gamma(s$ mit $s \in s(C)$.

Sei $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$ eine stetige beschränkte auf $\mathbb{R}$ definierte komplex wertige Funktion. Es gilt $\gamma(C) = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(\lambda) d\mathcal{R}(E_\lambda) = \gamma_1(C) + i\gamma_2(C) \in \mathcal{G}(\mathcal{H})$. Wir setzen: $\mathcal{G}_{\gamma(C)} = \mathcal{G}_{\gamma_1(C)} \cup \mathcal{G}_{\gamma_2(C)}$ Dann ist $\mathcal{G}_{\gamma(C)} \subseteq \mathcal{G}_C$. Die Meßwertmengen für $\mathcal{R}^{-1}(\mathcal{G}_{\gamma(C)}) \subseteq \mathcal{R}^{-1}(\mathcal{G}_C)$ haben ebenfalls die Form $\gamma^{-1}(\{\gamma(s)\}) =$ $= \{x \in \mathbb{R} \mid \gamma(x) = \gamma(s)\}$ $(s \in s(C))$.

Sei $\tilde{\mathcal{L}} = \{\tilde{E}_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ eine weitere Observable von $\mathcal{H}$ und $\tilde{C} = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, d\mathcal{R}(\tilde{E}_\lambda)$ der zugehörige hermitesche Operator mit dem Spektrum $s(\tilde{C})$ Es seien $\gamma, \tilde{\gamma}$ stetige beschränkte auf $\mathbb{R}$ definierte komplexwertige Funktionen so, daß $\mathcal{G}_{\gamma(C)}$ mit $\mathcal{G}_{\tilde{\gamma}(\tilde{C})}$ elementweise vertauschbar ist. Wir setzen $\mathcal{G}_{\gamma(C),\tilde{\gamma}(\tilde{C})} = \mathcal{G}_{\gamma(C)} \cup \mathcal{G}_{\tilde{\gamma}(\tilde{C})}$. Es sind also die Elemen von $\mathcal{G}_{\gamma(C),\tilde{\gamma}(\tilde{C})}$ paarweise vertauschbar und die von $\mathcal{R}^{-1}(\mathcal{G}_{\gamma(C),\tilde{\gamma}(\tilde{C})}$ paarweise kommensurabel. Durch Messung von $\mathcal{R}^{-1}(\mathcal{G}_{\gamma(C),\tilde{\gamma}(\tilde{C})})$ sind dann für geeignete Werte $s \in s(C)$ und $\tilde{s} \in s(\tilde{C})$ die Observable $\mathcal{L}$ bis auf $\gamma^{-1}(\{\gamma(s)\})$ und zugleich die Observable $\tilde{\mathcal{L}}$ bis auf $\tilde{\gamma}^{-1}(\{\tilde{\gamma}(\tilde{s})\})$ bestimmt.

Wir betrachten nun die kanonischen Observablen $\{E^\nu_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ und $\{F^\nu_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ von $\mathcal{H}$ für $\nu = 1, 2, \ldots, m$.

Sei $0 \neq \alpha_\nu \in \mathbb{R}$ und $\gamma_{\alpha_\nu}: \lambda \to e^{\frac{i}{\hbar}\alpha_\nu \lambda}$ für ein $\nu \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Die Funktion γ_{α_ν} ist auf $\mathbb{R}$ stetig und beschränkt. Es gilt $\gamma_{\alpha_\nu}(Q_\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{i}{\hbar}\alpha_\nu \lambda} d\mathcal{R}(E^\nu_\lambda) =$

$= \cos\left(\frac{\alpha_\nu Q_\nu}{\hbar}\right) + i \sin\left(\frac{\alpha_\nu Q_\nu}{\hbar}\right)$. Das Spektrum $s(Q_\nu)$ von Q_ν ist die reelle Achse $\mathbb{R}$. Sei $s \in \mathbb{R}$. Dann gilt $\gamma_{\alpha_\nu}(x) = \gamma_{\alpha_\nu}(s)$ für ein $x \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn mit einer ganzen Zahl m die Gleichung $x - s = \frac{2\pi\hbar}{\alpha_\nu} m$ $\left(= \frac{h}{\alpha_\nu} m\right)$ gilt. Wenn ein Meßwert bis auf $\gamma_{\alpha_\nu}^{-1}(\{\gamma_{\alpha_\nu}(s)\})$ bestimmt ist, so ist er also bis auf eine additive Konstante der Form $\frac{h}{\alpha_\nu} m$ (kurz: "modulo $\frac{h}{\alpha_\nu}$") bestimmt. Für die Observable $\{F_\lambda^\nu \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ gilt die entsprechende Überlegung. Damit erhalten wir folgenden

.2 Satz: Sei $0 \neq \alpha_\nu \in \mathbb{R}$ und $0 \neq \beta_\nu \in \mathbb{R}$ für $\nu = 1, 2, \ldots, m$. Dann ist durch Messung von $\mathcal{R}^{-1}(\mathcal{G}_{e^{\frac{i}{\hbar}\alpha_\nu Q_\nu}})$ bzw. $\mathcal{R}^{-1}(\mathcal{G}_{e^{\frac{i}{\hbar}\beta_\nu P_\nu}})$ die ν-te Ortskoordinate modulo $\frac{h}{\alpha_\nu}$ bzw. die ν-te Impulskoordinate modulo $\frac{h}{\beta_\nu}$ bestimmt. ($\nu = 1, 2, \ldots, m$; für $\nu = m$ setze man "Zeit-" bzw. "Energiekoordinate" ein.)

C. Gemeinsame Meßbarkeit von Ort, Impuls, Zeit und Energie

Sei $0 \neq \alpha_\nu \in \mathbb{R}$ und $0 \neq \beta_\nu \in \mathbb{R}$ für ein $\nu \in \{1, 2, \ldots, m\}$ und sei $\alpha_\mu = \beta_\mu = 0$ für $\mu \neq \nu$. Mit diesen Werten erhalten wir aus Satz 14.1 die Relation $e^{\frac{i}{\hbar}\alpha_\nu Q_\nu} \cdot e^{\frac{i}{\hbar}\beta_\nu P_\nu} = e^{\frac{i}{\hbar}\alpha_\nu \beta_\nu} e^{\frac{i}{\hbar}\beta_\nu P_\nu} \cdot e^{\frac{i}{\hbar}\alpha_\nu Q_\nu}$.

Daraus folgt die Vertauschbarkeit von $e^{\frac{i}{\hbar}\alpha_\nu Q_\nu}$ mit $e^{\frac{i}{\hbar}\beta_\nu P_\nu}$, wenn $\frac{\alpha_\nu \beta_\nu}{\hbar} = 2\pi m$ (also $\alpha_\nu \beta_\nu = h m$) mit einer ganzen Zahl m gilt. Sei $\alpha_\nu \beta_\nu = h m$. Dann ist also $e^{\frac{i}{\hbar}\alpha_\nu Q_\nu}$ mit $e^{\frac{i}{\hbar}\beta_\nu P_\nu}$ vertauschbar. Es ist jedoch auch $e^{\frac{i}{\hbar}\alpha_\nu Q_\nu}$ mit $\left(e^{\frac{i}{\hbar}\beta_\nu P_\nu}\right)^* = e^{-\frac{i}{\hbar}\beta_\nu P_\nu}$ vertauschbar, denn es gilt $\alpha_\nu(-\beta_\nu) = h(-m)$ mit der ganzen Zahl $-m$. Wegen

$\cos\left(\frac{\alpha_\nu Q_\nu}{\hbar}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{i}{\hbar}\alpha_\nu Q_\nu} + \left(e^{\frac{i}{\hbar}\alpha_\nu Q_\nu}\right)^*\right)$, $\sin\left(\frac{\alpha_\nu Q_\nu}{\hbar}\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{\frac{i}{\hbar}\alpha_\nu Q_\nu} - \left(e^{\frac{i}{\hbar}\alpha_\nu Q_\nu}\right)^*\right)$,

$\sin\left(\frac{\beta_\nu P_\nu}{\hbar}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{i}{\hbar}\beta_\nu P_\nu} + \left(e^{\frac{i}{\hbar}\beta_\nu P_\nu}\right)^*\right)$, $\cos\left(\frac{\beta_\nu P_\nu}{\hbar}\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{\frac{i}{\hbar}\beta_\nu P_\nu} - \left(e^{\frac{i}{\hbar}\beta_\nu P_\nu}\right)^*\right)$

folgt dann die Vertauschbarkeit folgender Operatorenpaare: $\cos\left(\frac{\alpha_\nu Q_\nu}{\hbar}\right), \cos\left(\frac{\beta_\nu P_\nu}{\hbar}\right)$; $\cos\left(\frac{\alpha_\nu Q_\nu}{\hbar}\right), \sin\left(\frac{\beta_\nu P_\nu}{\hbar}\right)$; $\sin\left(\frac{\alpha_\nu Q_\nu}{\hbar}\right), \cos\left(\frac{\beta_\nu P_\nu}{\hbar}\right)$; $\sin\left(\frac{\alpha_\nu Q_\nu}{\hbar}\right), \sin\left(\frac{\beta_\nu P_\nu}{\hbar}\right)$.

Daraus folgt, daß (mit der Bezeichnung aus B) die Elemente von $\mathcal{G}_{e^{\frac{i}{\hbar}\alpha_\nu Q_\nu}, e^{\frac{i}{\hbar}\beta_\nu P_\nu}}$ paarweise vertauschbar und die von $\mathcal{R}^{-1}(\mathcal{G}_{e^{\frac{i}{\hbar}\alpha_\nu Q_\nu}, e^{\frac{i}{\hbar}\beta_\nu P_\nu}})$ paarweise kommensurabel sind. Durch Messung von $\mathcal{R}^{-1}(\mathcal{G}_{e^{\frac{i}{\hbar}\alpha_\nu Q_\nu}, e^{\frac{i}{\hbar}\beta_\nu P_\nu}})$

ist dann(mit14.2)die ν-te Ortskoordinate modulo $\frac{h}{\alpha_\nu}$ und zugleich die ν-te Impulskoordinate modulo $\frac{h}{\beta_\nu}$ bestimmt. Damit erhalten wir den

14.3 Satz: Sei $0 \neq l_\nu \in \mathfrak{R}$ und $0 \neq i_\nu \in \mathfrak{R}$ so, daß $l_\nu \cdot i_\nu = \frac{h}{m_\nu}$ mit einer ganzen Zahl m_ν gilt $(\nu = 1,2,\ldots,m)$. Dann ist durch Messung von $\mathfrak{R}^{-1}(\mathfrak{P}\, e^{i\frac{2\pi}{l_\nu}q_\nu}, e^{i\frac{2\pi}{i_\nu}p_\nu})$ die ν-te Ortskoordinate modulo l_ν und zugleich die ν-te Impulskoordinate modulo i_ν bestimmt. Kurz: Es sind gemeinsam meßbar die ν-te Ortskoordinate modulo l_ν und die ν-te Impulskoordinate modulo i_ν. ($\nu = 1,2,\ldots,m$; für $\nu = m$ setze man "Zeit" bzw. "Energie" statt "m-te Orts-" bzw. "Impulskoordinate".)

Bei jedem praktisch vorkommenden physikalischen System ist die Gesamtheit aller Meßwerte für die ν-te Orts- bzw. Impulskoordinate für $\nu = 1,2,\ldots,m$ dem Betrage nach beschränkt. Wir sind daher berechtigt zu folgender

14.4 Annahme: Es existieren zum System $\mathfrak{P}$ positive reelle Zahlen $\mathfrak{L}_\nu$ und $\mathfrak{J}_\nu$ für $\nu = 1,2,\ldots,m$ so, daß die Beträge aller vorkommende Meßwerte für die ν-te Ortskoordinate kleiner als $\mathfrak{L}_\nu$ und für die ν-te Impulskoordinate kleiner als $\mathfrak{J}_\nu$ sind. (Für $\nu = m$ "Zeit" bzw. "Energie" statt "m-te Orts-" bzw. "Impulskoordinate".) Zahlen $\mathfrak{L}_\nu$ und $\mathfrak{J}_\nu$ mit dieser Eigenschaft werden als Schranken des Systems $\mathfrak{P}$ bezeichnet.

Wenn $\mathfrak{L}'_\nu \geq \mathfrak{L}_\nu$ und $\mathfrak{J}'_\nu \geq \mathfrak{J}_\nu$ für $\nu = 1,2,\ldots,m$ gilt, dann sind mit $\mathfrak{L}_\nu, \mathfrak{J}_\nu$ stets auch $\mathfrak{L}'_\nu, \mathfrak{J}'_\nu$ $(\nu = 1,2,\ldots,m)$ Schranken von $\mathfrak{P}$.

Unter der Annahme, daß $\mathfrak{L}_\nu, \mathfrak{J}_\nu$ $(\nu = 1,2,\ldots,m)$ Schranken von $\mathfrak{P}$ sind, ist die ν-te Orts- bzw. Impulskoordinate eindeutig bestimmt, wenn sie modulo $\mathfrak{L}_\nu$ bzw. modulo $\mathfrak{J}_\nu$ bestimmt ist. Zusammen mit 14.3 erhalten wir daher den

Satz von der gemeinsamen Meßbarkeit von Ort, Impuls, Energie und Zeit:

Es seien $\mathfrak{L}_\nu, \mathfrak{Y}_\nu$ $(\nu = 1,2,\ldots,n)$ Schranken von $\mathfrak{H}$ so, daß $\mathfrak{L}_\nu \cdot \mathfrak{Y}_\nu = \frac{h}{m_\nu}$ mit einer ganzen Zahl m_ν für $\nu = 1,2,\ldots,n$ gilt. Dann ist durch Messung von $\mathfrak{R}^{-1}\left(\mathfrak{S}_e^{i\frac{2\pi}{\mathfrak{L}_\nu}Q_\nu}, e^{i\frac{2\pi}{\mathfrak{Y}_\nu}P_\nu}\right)$ die ν-te Ortskoordinate zugleich mit der ν-ten Impulskoordinate bestimmt. Kurz: Die ν-te Ortskoordinate ist gemeinsam meßbar mit der ν-ten Impulskoordinate. ($\nu = 1,2,\ldots,n$; für $\nu = n$ setze man "Zeit" bzw. "Energie" statt "n-te Orts-" bzw. "Impulskoordinate.")

Satz 14.5 zeigt, daß die Möglichkeit einer gemeinsamen Meßbarkeit von Ort, Impuls, Zeit und Energie nicht ausgeschlossen werden kann. Das erscheint im Hinblick auf die übliche Theorie sehr merkwürdig. Satz 14.5 scheint im Widerspruch zu den Heisenbergschen Unschärferelationen (13.1) zu stehen. Diese gelten jedoch nicht für alle Zustände. Wenn Schranken $\mathfrak{L}_\nu, \mathfrak{Y}_\nu$ $(\nu = 1,2,\ldots,n)$ von $\mathfrak{H}$ so existieren, daß Ort, Impuls, Energie und Zeit gemeinsam meßbar sind, dann können die Relationen (13.1) nicht gelten, d.h. dann existieren keine Zustände von $\mathfrak{H}$ im Modell $\mathcal{M}$, für die 13.1 gilt. Es besteht also kein Widerspruch zu 13.1.

Einen Satz wie 14.5 könnte man auch für ein übliches Modell $\mathcal{M}_1^{\mathfrak{S}}$ der Quantenmechanik(2.1) formulieren, das zu einem physikalischen System $\mathfrak{S}$ gehört. Dann können wir wie oben schließen: Wenn Schranken für $\mathfrak{S}$ existieren, so daß Ort und Impuls gemeinsam meßbar sind, dann kann es keine Zustände von $\mathfrak{S}$ in $\mathcal{M}_1^{\mathfrak{S}}$ geben so, daß die Heisenbergschen Unschärferelationen (2.13) gelten. Da diese jedoch in einem üblichen Modell praktisch für alle Zustände gelten (§ 13), kann es praktisch gar keine Zustände in $\mathfrak{S}$ geben. Für ein System $\mathfrak{S}$ mit derartigen Schranken existiert also gar kein physikalisch sinnvolles übliches Modell der Quantenmechanik. Ein Satz wie 14.5 kann daher höchstens für Modelle mit Zeitoperator sinnvoll sein. (Hier stehen "mehr" Zustände zur Verfügung.)

D. Unschärfeaussagen für Ort, Impuls, Zeit und Energie

Die erste Unschärfeaussage, die wir herleiten wollen, erhalten wir durch Umkehrung von Satz 14.5. Wenn (aus experimentellen oder sonstigen Gründen) feststeht, daß Ort und Impuls sowie Energie und Zeit nicht gemeinsam gemessen werden können, so müssen alle möglichen Schranken $\mathfrak{L}_\nu, \mathfrak{I}_\nu$ $(\nu = 1,2,\ldots,m)$ von $\mathfrak{H}$ den Relationen $\mathfrak{L}_\nu \cdot \mathfrak{I}_\nu > h$ $(\nu = 1,\ldots,m)$ genügen. Würde nämlich für ein $\nu \in \{1,2,\ldots,m\}$ und gewisse Schranken $\tilde{\mathfrak{L}}_\nu, \tilde{\mathfrak{I}}_\nu$ die Beziehung $\tilde{\mathfrak{L}}_\nu \tilde{\mathfrak{I}}_\nu \leq h$ bestehen, dann würde eine reelle Zahl $\gamma_\nu \geq 1$ existieren, so daß $(\sqrt{\gamma_\nu}\,\tilde{\mathfrak{L}}_\nu)(\sqrt{\gamma_\nu}\,\tilde{\mathfrak{I}}_\nu) = h$ gilt; dann wären $\tilde{\mathfrak{L}}'_\nu = \sqrt{\gamma_\nu}\,\tilde{\mathfrak{L}}_\nu\ (\geq \tilde{\mathfrak{L}}_\nu)$ und $\tilde{\mathfrak{I}}'_\nu = \sqrt{\gamma_\nu}\,\tilde{\mathfrak{I}}_\nu\ (\geq \tilde{\mathfrak{I}}_\nu)$ Schranken von $\mathfrak{H}$ so, daß (nach 14.5) die ν-te Orts- und Impulskoordinate gemeinsam meßbar wären. Es gilt also die folgende

14.6 Unschärfeaussage: Es seien $\mathfrak{L}_\nu, \mathfrak{I}_\nu$ $(\nu = 1,2,\ldots,m)$ Schranken von $\mathfrak{H}$. Wenn die ν-te Ortskoordinate und die ν-te Impulskoordinate nicht gemeinsam meßbar sind, dann gilt die Relation

$$\mathfrak{L}_\nu \cdot \mathfrak{I}_\nu > h \qquad (\nu = 1,2,\ldots,m)$$

(Für $\nu = m$ setze man "Zeit" bzw. "Energie" statt " m-te Orts-" bzw. "Impulskoordinate.")

Die Relation $\mathfrak{L}_m \cdot \mathfrak{I}_m > h$ bedeutet z.B., daß die Meßdauer für eine Messung eine von der Energie abhängige Schwelle nicht unterschreiten kann ("Elementarzeit").

Wir leiten nun eine weitere Unschärfeaussage her.

Es seien $\mathfrak{L}_\nu, \mathfrak{I}_\nu$ $(\nu = 1,\ldots,m)$ Schranken von $\mathfrak{H}$ und ℓ_ν, i_ν $(\nu = 1,2,\ldots,m)$ reelle positive Zahlen. Sei für ein $\nu \in \{1,2,\ldots,m\}$ die ν-te Ortskoordinate modulo ℓ_ν und zugleich die ν-te Impulskoordinate modulo i_ν bestimmt. Dann bedeutet $\frac{\mathfrak{L}_\nu}{\ell_\nu}$ bzw. $\frac{\mathfrak{I}_\nu}{i_\nu}$ ungefähr die Anzahl der zur

Auswahl stehenden Möglichkeiten für den Meßwert der ν-ten Orts- bzw. Impulskoordinate, also den Grad der Vieldeutigkeit der ν-ten Orts- bzw. Impulskoordinate. Wir können $\frac{\mathcal{L}_\nu}{\ell_\nu}$ und $\frac{\mathcal{J}_\nu}{i_\nu}$ als Maß für die Unbestimmtheit dieser Koordinaten verwenden.

Wenn $\ell_\nu \cdot i_\nu = \frac{h}{m_\nu}$ (m_ν ganz) gilt, dann sind die Elemente von $\mathcal{R}^{-1}\left(\mathcal{Y}_e, e^{i\frac{2\pi}{\ell_\nu}Q_\nu}, e^{i\frac{2\pi}{i_\nu}P_\nu}\right)$ paarweise kommensurabel. Es gilt jedoch auch die Umkehrung; denn die Operatoren $e^{i\frac{2\pi}{\ell_\nu}Q_\nu}$, $e^{i\frac{2\pi}{i_\nu}P_\nu}$ sind vertauschbar dann und nur dann, wenn $\ell_\nu \cdot i_\nu = \frac{h}{m_\nu}$ (m_ν ganz) gilt. Für die Unbestimmtheiten $\frac{\mathcal{L}_\nu}{\ell_\nu}$, $\frac{\mathcal{J}_\nu}{i_\nu}$ erhalten wir dann eine Relation, die eine Ähnlichkeit zur Heisenbergschen Unschärferelation aufweist

Unschärfeaussage: Es seien $\mathcal{L}_\nu, \mathcal{J}_\nu$ ($\nu = 1,2,\ldots,m$) Schranken von $\mathcal{Y}$ und ℓ_ν, i_ν ($\nu = 1,2,\ldots,m$) positive reelle Zahlen. Wenn die ν-te Orts- und Impulskoordinate gemeinsam gemessen sind modulo ℓ_ν bzw. modulo i_ν, dann gilt die Relation

$$\left(\frac{\mathcal{L}_\nu}{\ell_\nu}\right)\cdot\left(\frac{\mathcal{J}_\nu}{i_\nu}\right) \geq \frac{\mathcal{L}_\nu \cdot \mathcal{J}_\nu}{h} \qquad (\nu = 1,2,\ldots,m)$$

(Für $\nu = m$ setze man "Zeit" bzw. "Energie" statt "m-te Orts-" bzw. "Impulskoordinate". $\frac{\mathcal{L}_\nu}{\ell_\nu}$ bzw. $\frac{\mathcal{J}_\nu}{i_\nu}$ gibt ungefähr den Grad der Vieldeutigkeit der ν-ten Orts- bzw. Impulskoordinate an.)

Sei $\nu \in \{1,2,\ldots,m\}$. Für $\left(\frac{\mathcal{L}_\nu}{\ell_\nu}\right) \leq 1$ und $\left(\frac{\mathcal{J}_\nu}{i_\nu}\right) \leq 1$ sind die ν-te Orts- und Impulskoordinate eindeutig. Wenn $\frac{\mathcal{L}_\nu \cdot \mathcal{J}_\nu}{h} \gg 1$ gilt (was im allgemeinen der Fall ist; Größenordnung häufig $\sim 10^{10^{10}}$) und die ν-te Impulskoordinate eindeutig ist, dann ist die ν-te Ortskoordinate praktisch völlig unbestimmt (Grad der Vielfachheit ebenfalls $\sim 10^{10^{10}}$). Je kleiner die Schranken von $\mathcal{Y}$ gewählt werden können, je näher $\frac{\mathcal{L}_\nu \cdot \mathcal{J}_\nu}{h}$ dem Wert 1 kommt, umso größer kann die Genauigkeit der ν-ten Orts- und Impulskoordinate werden, umso "mehr" gemeinsame Informationen über beide Koordinaten sind möglich. Im Fall $\frac{\mathcal{L}_\nu \cdot \mathcal{J}_\nu}{h} = 1$ besteht (in Übereinstimmung mit 14.5) die Möglichkeit der gemeinsamen Meßbarkeit.

Daß die Relationen (14.7) im Gegensatz zu den Heisenbergschen Unbestimmtheitsrelationen (13.1) eine gemeinsame Meßbarkeit von Ort und Impuls sowie von Energie und Zeit zulassen, liegt daran, daß die Faktoren der linken Seite bereits dann völlige Bestimmtheit bedeuten, wenn sie gleich 1 sind. Die Quadratwurzeln der Streuungen in 13.1 hingegen müssen im Falle eindeutiger Bestimmtheit von Ort, Impuls, Zeit und Energie gleich 0 sein.

§ 15 Hypothese von der Meßbarkeit am absoluten Nullpunkt.

Unter Verwendung des III. Hauptsatzes der Thermodynamik, des Nernstschen Wärmesatzes [6, S. 255] können wir aus Satz 14.5 eine physikalische Folgerung ziehen.

Sei $\mathfrak{H}$ ein physikalisches System mit Zeitmessung. Zur Veranschaulichung kann man sich darunter etwa ein Gasmolekül vorstellen. Dann ist $f^{\mathfrak{H}} = 4$ (drei Freiheitsgrade des Ortes und die Zeit). Von der Zeit und der Energie wollen wir zunächst absehen. Wir betrachten ein System $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{H}$ mit $f^{\mathfrak{S}} = f^{\mathfrak{H}} - 1$ so, daß seine Orts- und Impulsobservablen mit denen von $\mathfrak{H}$ übereinstimmen.

Angenommen, es existieren Schranken $\mathfrak{L}_\nu, \mathfrak{Z}_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, f^{\mathfrak{S}})$ von $\mathfrak{S}$ so, daß $\mathfrak{L}_\nu \cdot \mathfrak{Z}_\nu = h$ für $\nu = 1, 2, \ldots, f^{\mathfrak{S}}$ gilt. Dann sind nach Satz 14.5 die Orts- und Impulskoordinaten gemeinsam meßbar. Jedes Meßwert-$2f^{\mathfrak{S}}$-tupel der Orts- und Impulskoordinaten liegt dann im Phasenraum $\mathfrak{R}_{2f^{\mathfrak{S}}}$ von $\mathfrak{S}$ stets in einer Zelle vom Volumen $(\mathfrak{L}_1 \cdot \mathfrak{Z}_1)(\mathfrak{L}_2 \cdot \mathfrak{Z}_2) \cdots (\mathfrak{L}_{f^{\mathfrak{S}}} \cdot \mathfrak{Z}_{f^{\mathfrak{S}}}) = h^{f^{\mathfrak{S}}}$. Das System $\mathfrak{S}$ "befindet" sich stets in einer solchen Zelle. Dieser Fall tritt nach dem III. Hauptsatz der Thermodynamik bekanntlich am absoluten Nullpunkt ein ([6, S. 257, Nr. 4]). Indem wir die Energie und die Zeit mit einbeziehen, gelangen wir zu folgender

Hypothese: Am absoluten Nullpunkt sind Ort, Impuls, Zeit und Energie gemeinsam meßbar.

§ 16. Beispiele für Modelle der Quantenmechanik mit Zeitoperator

A. Das kräftefreie Elektron

Es sei $\mathfrak{S}$ ein physikalisches System "kräftefreies Elektron". Die Zahl der Freiheitsgrade $f^{\mathfrak{S}}$ ist gleich 3. Die kanonischen Observablen des Ortes und des Impulses seien: $\{E_\lambda^\nu \mid \lambda \in \mathbb{R}\}, \{F_\lambda^\nu \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ $(\nu = 1,2,3)$. Wir erweitern $\mathfrak{S}$ durch Hinzunahme von Zeit und (-1) (Energie) zu einem physikalischen System $\mathfrak{P}$ mit Zeitmessung. Es sei $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{P}$ und $f^{\mathfrak{S}} = f^{\mathfrak{P}} - 1$. Die kanonischen Observablen von $\mathfrak{P}$ seien: $\{E_\lambda^\nu \mid \lambda \in \mathbb{R}\}, \{F_\lambda^\nu \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ $(\nu = 1,2,3,4)$. Dabei ist $\{E_\lambda^4 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ die Zeit- und $\{F_\lambda^4 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ die (-1) (Energie) -Observable.

Wir wollen nach dem Verfahren in § 12, C, ein zu $\mathfrak{P}$ gehöriges Modell mit Zeitoperator $\mathcal{M}^{\mathfrak{P}} = (\mathcal{H}^{\mathfrak{P}}, R^{\mathfrak{P}}, H^{\mathfrak{P}}, D^{\mathfrak{P}})$ konstruieren.

Sei $\mathcal{M}_0^{\mathfrak{S}}$ ein zu $\mathfrak{S}$ gehöriges Modell der klassischen Mechanik. Die Hamiltonfunktion von $\mathcal{M}_0^{\mathfrak{S}}$ möge die folgende bekannte Form haben:
$H_0^{\mathfrak{S}} : (q_1,q_2,q_3,p_1,p_2,p_3) \to H_0^{\mathfrak{S}}(q_1,q_2,q_3,p_1,p_2,p_3) = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)$.
(Es bezeichne m die Masse des Elektrons.) Sei $\mathcal{M}_0^{\mathfrak{P}}$ ein zu $\mathfrak{P}$ gehöriges Modell der klassischen Mechanik. Nach § 3 erhalten wir die Hamiltonfunktion
$H_0^{\mathfrak{P}} : (q_1,q_2,q_3,q_4,p_1,p_2,p_3,p_4) \to H_0^{\mathfrak{P}}(q_1, \ldots, q_4, p_1, \ldots, p_4) =$
$-\frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + p_4$.

Nach § 7, B, konstruieren wir ein zu $\mathfrak{P}$ gehöriges modifiziertes übliches Modell $\mathcal{M}_2^{\mathfrak{P}} = (\mathcal{H}_2^{\mathfrak{P}}, R_2^{\mathfrak{P}}, H_2^{\mathfrak{P}}, D_2^{\mathfrak{P}})$. Wir setzen $\mathcal{H}_2^{\mathfrak{P}} = L^2(\mathbb{R}_4)$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, dR_2^{\mathfrak{P}}(E_\lambda^\nu) = x_\nu \cdot$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, dR_2^{\mathfrak{P}}(F_\lambda^\nu) = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_\nu}$ $(\nu = 1, \ldots, 4)$. Dadurch sind die $R_2^{\mathfrak{P}}$ -Bilder

der kanonischen Observablen bekannt. Wir begnügen uns damit. Weiter setzen wir $H_2^\nu = H_0^\nu(x_1 \cdot, \ldots, x_4 \cdot, \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_4}) = \frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_3}\right)^2 + \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_4}\right.$. Jeder Summand des letzten Ausdrucks ist ein hermitescher Operator. Nach Satz 12.3 existiert eine Filterbasis $\mathfrak{f}_2^\nu$ auf $\mathfrak{L}(\mathfrak{H}_2^\nu)$ so, daß $H_2^\nu \subseteq \mathfrak{Lim}\, \mathfrak{f}_2^\nu$ gilt. Wir setzen $(H_2^\nu)_{\gamma,\delta} = \frac{1}{2m}\left(\sum_{\nu=1}^{3}\int_{-\gamma}^{\delta}\lambda^2 d\mathfrak{R}(F_\lambda^\nu)\right) + \int_{-\gamma}^{\delta}\lambda\, d\mathfrak{R}(F_\lambda^4)$ für alle $\gamma,\delta > 0$, $(\widetilde{H_2^\nu})_{\gamma,\delta} = \{(H_2^\nu)_{\gamma',\delta'} \mid \gamma' \geq \gamma, \delta' \geq \delta\}$ und $\mathfrak{f}_2^\nu = \{(\widetilde{H_2^\nu})_{\gamma,\delta} \mid \gamma > 0, \delta > 0\}$. Dann ist $\mathfrak{f}_2^\nu$ eine Filterbasis auf $\mathfrak{L}(\mathfrak{H}_2^\nu)$ und es gilt $H_2^\nu \subseteq \mathfrak{Lim}\, \mathfrak{f}_2^\nu$.

Nach 12.5 erhalten wir: $\mathfrak{E}(\mathfrak{M}_2^\nu, \mathfrak{f}_2^\nu) = (\mathfrak{E}(\mathfrak{H}_2^\nu), \mathfrak{E}(\mathfrak{R}_2^\nu), \mathfrak{E}(H_2^\nu, \mathfrak{f}_2^\nu), \mathfrak{E}(\mathfrak{D}_2^\nu))$ $= (\mathfrak{H}_2^\nu, \mathfrak{R}_2^\nu, \mathfrak{Lim}\,\varkappa'(\mathfrak{f}_2^\nu), \mathfrak{E}(\mathfrak{D}_2^\nu))$. Dabei ist $\varkappa'$ eine Abbildung von $\mathfrak{L}(\mathfrak{H}_2^\nu)$ in $\mathfrak{L}(\mathfrak{L}'(\mathfrak{H}_2^\nu))$ so, daß $(\varkappa'(A)f)(\mathfrak{B}) = f(\mathfrak{B}A)$ für alle $A, \mathfrak{B} \in \mathfrak{L}(\mathfrak{H}_2^\nu)$ und alle $f \in \mathfrak{L}'(\mathfrak{H}_2^\nu)$ gilt. $\mathfrak{Lim}$ wird in 12.1 definiert.

Schließlich setzen wir:

$$\mathfrak{M}^\nu = \mathfrak{E}(\mathfrak{M}_2^\nu, \mathfrak{f}_2^\nu)$$

Es gelte also: $\mathfrak{H}^\nu = L^2(\mathfrak{R}_4)$, $\mathfrak{R}^\nu = \mathfrak{R}_2^\nu$, $H^\nu = \mathfrak{Lim}\,\varkappa'(\mathfrak{f}_2^\nu)$, $\mathfrak{D}^\nu = \mathfrak{E}(\mathfrak{D}_2^\nu)$.

Wir suchen nun Zustände von $\mathfrak{A}$ in diesem Modell.

Dazu beweisen wir zunächst einen

16.1 Hilfssatz: Sei $\mathfrak{H}$ ein Hilbertraum, $\mathfrak{B} \in \mathfrak{L}(\mathfrak{H})$, $\gamma \in \mathbb{C}$ und f ein positives Funktional über $\mathfrak{L}(\mathfrak{H})$. Sei $\bar{\gamma}$ die zu γ konjugiert komplexe Zahl. Es sei $f(\mathfrak{B}) = \gamma$, $f(\mathfrak{B}^*) = \bar{\gamma}$, $f(\mathfrak{B}^*\mathfrak{B}) = f(\mathfrak{B}\mathfrak{B}^*) = \gamma\bar{\gamma}$ und $f(I_{\mathfrak{H}}) = 1$. Dann gilt $f(A\mathfrak{B}) = f(\mathfrak{B}A) = \gamma f(A)$ für alle $A \in \mathfrak{L}(\mathfrak{H})$.

Beweis: Sei $A \in \mathfrak{L}(\mathfrak{H})$. Mit Hilfe der Schwarzschen Ungleichung [7, S. 1 III] erhalten wir die Abschätzung:

$|f(A(\mathcal{B}-\gamma I_{\mathcal{H}}))|^2 \leq f(AA^*)\, f((\mathcal{B}-\gamma I_{\mathcal{H}})^*(\mathcal{B}-\gamma I_{\mathcal{H}})) = f(AA^*)(f(\mathcal{B}^*\mathcal{B}) - \bar{\gamma} f(\mathcal{B}) - \gamma f(\mathcal{B}^*) + \bar{\gamma}\gamma f(I_{\mathcal{H}})) = f(AA^*)\,(\bar{\gamma}\gamma - \bar{\gamma}\gamma - \bar{\gamma}\gamma + \bar{\gamma}\gamma) = 0.$

Daraus folgt: $f(A(\mathcal{B}-\gamma I_{\mathcal{H}})) = f(A\mathcal{B}) - \gamma f(A) = 0$ **Die entsprechende Abschätzung für** $|f((\mathcal{B}-\gamma I_{\mathcal{H}})A)|^2$ **liefert:** $f(\mathcal{B}A) - \gamma f(A) = 0$ **Damit ist 16.1 bewiesen.**

Wie in 11.6 sei $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{B}(L^2(\mathbb{R}_4))$ **die Algebra aller Multiplikationsoperatoren mit beschränkten stetigen komplexwertigen Funktionen** γ **auf** $\mathbb{R}_4$, $\mathcal{O}_{\mathcal{U}} = T^{-1}\mathfrak{M}\,T$ **(in diesem Fall gilt** $V = I_{\mathcal{H}}$ **wegen** $\mathcal{H}_2^{\vartheta} = L^2(\mathbb{R}_4)$**) und** $\vartheta = (d_1, d_2, d_3, d_4) \in \mathbb{R}_4$ **. Nach 11.6 existiert mindestens eine Fortsetzung des auf** $\mathcal{O}_{\mathcal{U}}$ **gegebenen positiven Funktionals** $a_{\mathcal{U},\vartheta} : \gamma(\mathcal{P}) \to \gamma(d_1, d_2, d_3, d_4)$ $(\gamma(\mathcal{P}) = T^{-1}(\gamma \cdot)T \in \mathcal{O}_{\mathcal{U}})$ **auf ganz** $\mathfrak{B}(L^2(\mathbb{R}_4))$ **. Wenn** ϑ **einer bestimmten Gleichung genügt, so ist jede derartige Fortsetzung eine Lösung der Schrödingergleichung** $(\mathfrak{Lim}\, r'(l_{\gamma 2}^{\vartheta}))\, a = 0$

Satz: Sei $\vartheta = (d_1, d_2, d_3, d_4) \in \mathbb{R}_4$ so, daß $\frac{1}{2m}(d_1^2 + d_2^2 + d_3^2) + d_4 = 0$ gilt und sei $f_{\mathcal{U},\vartheta}$ ein positives Funktional über $\mathfrak{B}(L^2(\mathbb{R}_4))$ nach 11.6, d.h. es gelte $f_{\mathcal{U},\vartheta}(\gamma(\mathcal{P})) = \gamma(d_1, d_2, d_3, d_4)$ für alle $\gamma(\mathcal{P}) \in \mathcal{O}_{\mathcal{U}}$. Dann ist $f_{\mathcal{U},\vartheta}$ ein Zustand von $\mathcal{U}$ im Modell $\mathcal{M}^{\mathcal{U}}$, d.h. es gilt $(\mathfrak{Lim}\, r'(l_{\gamma 2}^{\vartheta}))\, f_{\mathcal{U},\vartheta} = 0$ und $\| f_{\mathcal{U},\vartheta} \| = 1$.

Beweis: Nach 12.1 ist $(\mathfrak{Lim}\, r'(l_{\gamma 2}^{\vartheta}))\, f_{\mathcal{U},\vartheta} = \lim r'(l_{\gamma 2}^{\vartheta})\, f_{\mathcal{U},\vartheta}$, falls der rechts stehende Limes existiert. Wir zeigen, daß er existiert und = 0 ist. Dazu wählen wir $\gamma, \delta > 0$ so, daß $d_\nu \in [-\gamma, \delta]$ für $\nu = 1, 2, 3, 4$ gilt. Dann gilt $f_{\mathcal{U},\vartheta}((H_2^{\vartheta})_{\gamma,\delta}) = \frac{1}{2m}\left(\sum_{\nu=1}^{3} d_\nu^2\right) + d_4$ und $f_{\mathcal{U},\vartheta}((H_2^{\vartheta})_{\gamma,\delta}^2) = \left(\frac{1}{2m}\sum_{\nu=1}^{3} d_\nu^2 + d_4\right)^2$

Dasselbe gilt für jedes $(H_2^{\vartheta})_{\gamma',\delta'}$ mit $\gamma' \geq \gamma$ und $\delta' \geq \delta$. Weiter gilt $f_{\mathcal{U},\vartheta}(I_{\mathcal{H}_2^{\vartheta}}) = 1$ und $(H_2^{\vartheta})_{\gamma',\delta'}^* = (H_2^{\vartheta})_{\gamma',\delta'}$ für alle $\gamma', \delta' > 0$. Nach Hilfssatz 16.1 folgt dann für alle $A \in \mathfrak{B}(L^2(\mathbb{R}_4))$ und alle $\gamma' \geq \gamma$, $\delta' \geq \delta$: $f_{\mathcal{U},\vartheta}(A\,(H_2^{\vartheta})_{\gamma',\delta'}) = \left(\frac{1}{2m}\sum_{\nu=1}^{3} d_\nu^2 + d_4\right) f_{\mathcal{U},\vartheta}(A) = 0$. Das bedeutet, daß für alle $\gamma' \geq \gamma$ und $\delta' \geq \delta$ die Beziehung $r'((H_2^{\vartheta})_{\gamma',\delta'})\, f_{\mathcal{U},\vartheta} = 0$ gilt.

Die Menge $\{\varkappa'((H_2^{\mathfrak{A}})_{\gamma',\delta'} \mid \gamma' \geq \gamma, \delta' \geq \delta\}$ besteht also nur aus dem Nullfunktional; sie ist Element der Filterbasis $\varkappa'(f_2^{\mathfrak{A}}) f_{\mathfrak{P},\vartheta}$. Also konvergiert $\varkappa'(f_2^{\mathfrak{A}}) f_{\mathfrak{P},\vartheta}$ gegen $\mathcal{O}$. Es existiert also $\lim \varkappa'(f_2^{\mathfrak{A}}) f_{\mathfrak{P},\vartheta}$ und ist = 0. Die Beziehung $\| f_{\mathfrak{P},\vartheta} \| = 1$ ist nach 5.21 gleichbedeutend mit $f_{\mathfrak{P},\vartheta}(I_{\mathfrak{K}^{\mathfrak{A}}_2}) = 1$, wovon bereits Gebrauch gemacht wurde. Damit ist Satz 16.2 bewiesen.

Sei $\vartheta = (d_1, d_2, d_3, d_4) \in \mathbb{R}_4$ und $\frac{1}{2m}(d_1^2 + d_2^2 + d_3^2) + d_4 = \mathcal{O}$. Das System $\mathfrak{A}$ möge sich im Zustand $f_{\mathfrak{P},\vartheta}$ befinden. Der Erwartungswert $\mu_{f_{\mathfrak{P},\vartheta}}(T_\nu^{\mathfrak{A}})$ für eine Messung der ν-ten Impulskoordinate im Zustand $f_{\mathfrak{P},\vartheta}$ ist gleich $\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, d f_{\mathfrak{P},\vartheta}(\mathcal{R}^{\mathfrak{A}}(F_\lambda^\nu)) = d_\nu$, und für die Streuung erhalten wir $s_{f_{\mathfrak{P},\vartheta}}(T_\nu^{\mathfrak{A}}) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda - d_\nu)^2 \, d f_{\mathfrak{P},\vartheta}(\mathcal{R}^{\mathfrak{A}}(F_\lambda^\nu)) = \mathcal{O}$ $(\nu = 1, 2, 3, 4)$. Im Zustand $f_{\mathfrak{P},\vartheta}$ liefert also eine Messung von Impuls und Energie die "scharfen" Werte $d_1, d_2, d_3, -d_4$.

Nach § 11, F, können wir die Wahrscheinlichkeiten für die Eigenschaften des Ortes und der Zeit im Zustand $f_{\mathfrak{P},\vartheta}$ ermitteln.

Sei $\mathcal{M}_1^{\mathfrak{S}}$ ein übliches Modell der Quantenmechanik für das "kräftefreie Elektron" $\mathfrak{S}$ mit dem üblichen Hamiltonoperator $H_1^{\mathfrak{S}} = \frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_3}\right)^2\right)$. In diesem Modell gibt es bekanntlich keine Zustände so, daß Impuls und Energie "scharfe" Meßwerte haben. Lösungen der Schrödingergleichung, die diese Eigenschaften haben könnten, sind nicht normierbar (ebene Wellen).

B. Der harmonische Oszillator

Es sei $\mathfrak{S}$ ein physikalisches System "harmonischer Oszillator". Die Zahl der Freiheitsgrade $f^{\mathfrak{S}}$ ist gleich 1. Analog zu A betten wir $\mathfrak{S}$ in ein System $\mathfrak{A}$ mit Zeitmessung ein $(f^{\mathfrak{A}} = f^{\mathfrak{S}} + 1 = 2)$. Die kanonischen Observablen von $\mathfrak{A}$ seien: $\{E_\lambda^\nu \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$, $\{F_\lambda^\nu \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ $(\nu = 1, 2)$.

Die Konstruktion eines zu $\mathfrak{F}$ gehörigen Modells mit Zeitoperator $\mathcal{M}^{\mathfrak{F}} = (\mathcal{H}^{\mathfrak{F}}, \mathcal{R}^{\mathfrak{F}}, H^{\mathfrak{F}}, \mathcal{D}^{\mathfrak{F}})$ erfolgt analog zu A.

Sei $\mathcal{M}_0^{\mathfrak{F}}$ ein zu $\mathfrak{F}$ gehöriges Modell der klassischen Mechanik mit der bekannten Hamiltonfunktion, $H_0^{\mathfrak{F}} : (q_1, p_1) \to H_0^{\mathfrak{F}}(q_1, p_1) = \frac{1}{2m} p_1^2 + \frac{m}{2}\omega^2 q_1^2$ und $\mathcal{M}_0^{\mathfrak{F}}$ ein zu $\mathfrak{F}$ gehöriges Modell der klassischen Mechanik mit der Hamiltonfunktion $H_0^{\mathfrak{F}} : (q_1, q_2, p_1, p_2) \to H_0^{\mathfrak{F}}(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{1}{2m} p_1^2 + \frac{m}{2}\omega^2 q_1^2 + p_2$. (Es bezeichne m die Masse und ω die Frequenz.)

Für ein zu $\mathfrak{F}$ gehöriges modifiziertes übliches Modell $\mathcal{M}_2^{\mathfrak{F}} = (\mathcal{H}_2^{\mathfrak{F}}, \mathcal{R}_2^{\mathfrak{F}}, H_2^{\mathfrak{F}}, \mathcal{D}_2^{\mathfrak{F}})$ setzen wir $\mathcal{H}_2^{\mathfrak{F}} = L^2(\mathbb{R}_2)$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, d R_2^{\mathfrak{F}}(E_\lambda^\nu) = x_\nu \cdot$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, d R_2^{\mathfrak{F}}(F_\lambda^\nu) = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_\nu}$ $(\nu = 1,2)$ und $H_2^{\mathfrak{F}} = H_0^{\mathfrak{F}}(x_1 \cdot, x_2 \cdot, \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_2}) = \frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2 + \frac{m}{2}\omega^2 (x_1 \cdot)^2 + \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_2}$.

Es ist $H_1^{\mathfrak{F}} = \frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2 + \frac{m}{2}\omega^2 (x_1 \cdot)^2$ der bekannte Hamiltonoperator der üblichen Theorie, d.h. eines zu $\mathfrak{F}$ gehörigen üblichen Modells $\mathcal{M}_1^{\mathfrak{F}}$. Der Operator $H_1^{\mathfrak{F}}$ ist hermitesch und sein Spektrum besteht nur aus Eigenwerten. Es sei $H_1^{\mathfrak{F}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, d H_{1,\lambda}^{\mathfrak{F}}$ mit der Spektralschar $\{ H_{1,\lambda}^{\mathfrak{F}} \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$. Wir setzen $(H_2^{\mathfrak{F}})_{\gamma,\delta} = \int_{-\gamma}^{\delta} \lambda \, d H_{1,\lambda}^{\mathfrak{F}} + \int_{-\gamma}^{\delta} \lambda \, d R_2^{\mathfrak{F}}(F_\lambda^2)$ für alle $\gamma, \delta > 0$, $(\widetilde{H_2^{\mathfrak{F}}})_{\gamma,\delta} = \{ (H_2^{\mathfrak{F}})_{\gamma',\delta'} \mid \gamma' \geq \gamma, \delta' \geq \delta \}$ und $\mathfrak{f}_2^{\mathfrak{F}} = \{ (\widetilde{H_2^{\mathfrak{F}}})_{\gamma,\delta} \mid \gamma, \delta > 0 \}$. Dann ist $\mathfrak{f}_2^{\mathfrak{F}}$ eine Filterbasis auf $\mathfrak{L}(L^2(\mathbb{R}_2))$ so, daß $H_2^{\mathfrak{F}} \subseteq \mathfrak{Lim}\, \mathfrak{f}_2^{\mathfrak{F}}$ gilt.

Nach 12.5 erhalten wir $\mathcal{E}(\mathcal{M}_2^{\mathfrak{F}}, \mathfrak{f}_2^{\mathfrak{F}}) = (\mathcal{E}(\mathcal{H}_2^{\mathfrak{F}}), \mathcal{E}(\mathcal{R}_2^{\mathfrak{F}}), \mathcal{E}(H_2^{\mathfrak{F}}, \mathfrak{f}_2^{\mathfrak{F}}), \mathcal{E}(\mathcal{D}_2^{\mathfrak{F}})) = (\mathcal{H}_2^{\mathfrak{F}}, \mathcal{R}_2^{\mathfrak{F}}, \mathfrak{Lim}'(\mathfrak{f}_2^{\mathfrak{F}}), \mathcal{E}(\mathcal{D}_2^{\mathfrak{F}}))$ und setzen

$$\mathcal{M}^{\mathfrak{F}} = \mathcal{E}(\mathcal{M}_2^{\mathfrak{F}}, \mathfrak{f}_2^{\mathfrak{F}}).$$

Es sei also $\mathcal{H}^{\mathfrak{F}} = L^2(\mathbb{R}_2)$, $\mathcal{R}^{\mathfrak{F}} = \mathcal{R}_2^{\mathfrak{F}}$, $H^{\mathfrak{F}} = \mathfrak{Lim}'(\mathfrak{f}_2^{\mathfrak{F}})$, $\mathcal{D}^{\mathfrak{F}} = \mathcal{E}(\mathcal{D}_2^{\mathfrak{F}})$.

Wir wollen Zustände von $\mathfrak{F}$ im Modell $\mathcal{M}^{\mathfrak{F}}$ aufsuchen. Dazu benötigen wir folgenden

16.3 Hilfssatz: Sei α bzw. β ein Wert aus dem Spektrum von H_1^{σ} bzw. $\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_2}$. Dann existiert ein positives Funktional $f_{\alpha,\beta}$ über $\mathfrak{B}(\mathfrak{H}^{\gamma})$ so, daß $f_{\alpha,\beta}((H_2^{\gamma})_{\gamma,\delta}) = \alpha+\beta$, $f_{\alpha,\beta}((H_2^{\gamma})^2_{\gamma,\delta}) = (\alpha+\beta)^2$ für alle $\gamma > \sigma$, $\delta > \sigma$ mit $\alpha \in [-\gamma,\delta]$, $\beta \in [-\gamma,\delta]$ und $f_{\alpha,\beta}(I_{\mathfrak{H}^{\gamma}}) = 1$ gilt.

Beweis: Aus der Definition der Operatoren H_1^{σ} und $\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_2}$ folgt unmittelbar, daß ihre Spektralscharen elementweise vertauschbar sind. Dann können wir für jede stetige beschränkte komplexwertige Funktion φ auf $\mathbb{R}_2$ den Operator $\varphi(H_1^{\sigma}, \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_2}) = \int_{\mathbb{R}_2} \varphi(\lambda_1,\lambda_2)\, d H^{\sigma}_{1,\lambda_1}\, d\mathcal{R}^{\gamma}(F^2_{\lambda_2})$ bilden. Er liegt stets in $\mathfrak{B}(\mathfrak{H}^{\gamma})$. Es bezeichne $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}(\mathfrak{H}^{\gamma})$ die Algebra aller Operatoren dieser Form (wie in § 11, D). Dann genügt $\mathfrak{A}$ den Voraussetzungen von Satz 11.3. Wir definieren auf $\mathfrak{A}$ das positive Funktional $a_{\alpha,\beta} : \varphi(H_1^{\sigma}, \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_2}) \longrightarrow \varphi(\alpha,\beta)$. Nach Satz 11.3 existiert dann eine Fortsetzung $f_{\alpha,\beta}$ von $a_{\alpha,\beta}$ auf ganz $\mathfrak{B}(\mathfrak{H}^{\gamma})$.

Es gilt $(H_2^{\gamma})_{\gamma,\delta} = \int_{-\gamma}^{\delta} \lambda_1\, d H^{\sigma}_{1,\lambda_1} + \int_{-\gamma}^{\delta} \lambda_2\, d\mathcal{R}^{\gamma}(F^2_{\lambda_2}) = \int_{\lambda_1 \in [-\gamma,\delta]} \lambda_1\, d H^{\sigma}_{1,\lambda_1}\, d\mathcal{R}^{\gamma}(F^2_{\lambda_2}) + \int_{\lambda_2 \in [-\gamma,\delta]} \lambda_2\, d H^{\sigma}_{1,\lambda_1}\, d\mathcal{R}^{\gamma}(F^2_{\lambda_2})$.

Daraus folgt $f_{\alpha,\beta}((H_2^{\gamma})_{\gamma,\delta}) = \alpha+\beta$, wenn $\alpha \in [-\gamma,\delta]$ und $\beta \in [-\gamma,\delta]$ gilt. Entsprechend gilt dann auch $f_{\alpha,\beta}((H_2^{\gamma})^2_{\gamma,\delta}) = (\alpha+\beta)^2$. Weiter gilt $f_{\alpha,\beta}(I_{\mathfrak{H}^{\gamma}}) = f_{\alpha,\beta}\left(\int_{\mathbb{R}_2} d H^{\sigma}_{1,\lambda_1}\, d\mathcal{R}^{\gamma}(F^2_{\lambda_2})\right) = 1$. Damit ist 16.3 bewiesen.

Das Spektrum von $\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_2}$ besteht aus der Gesamtheit aller reellen Zahlen. Wenn α im Spektrum von H_1^{σ} liegt, so liegt $-\alpha$ stets im Spektrum von $\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_2}$.

16.4 Satz: Sei α ein Wert aus dem Spektrum von H_1^{σ}. Dann ist $f_{\alpha,-\alpha}$ aus 16.3 ein Zustand von $\mathfrak{H}$ im Modell $\mathcal{M}^{\gamma}$, d.h. es gilt $(\mathfrak{Lim}\, r'(\mathfrak{l}_{\gamma_2}^{\gamma}))\, f_{\alpha,-\alpha} = 0$ und $\| f_{\alpha,-\alpha} \| = 1$.

Beweis: Es seien γ,δ positive reelle Zahlen so, daß $\alpha \in [-\gamma,\delta]$ und

$-\alpha \in [-\gamma, \delta]$ gilt. Dann genügt $f_{\alpha,-\alpha}$ aus 16.3 den Voraussetzungen des Hilfssatzes 16.1 für $\mathfrak{B} = (H_2^{\mathfrak{F}})_{\gamma,\delta}$ und $\gamma = \alpha + (-\alpha) = \mathfrak{O}$. Es folgt $f_{\alpha,-\alpha}(A\,(H_2^{\mathfrak{F}})_{\gamma,\delta}) = (\alpha + (-\alpha)) f_{\alpha,-\alpha}(A) = \mathfrak{O}$ für jedes $A \in \mathfrak{L}(\mathfrak{H}^{\mathfrak{F}})$. Daher gilt für alle $\gamma' \geq \gamma$, $\delta' \geq \delta$ die Beziehung $\pi'((H_2^{\mathfrak{F}})_{\gamma',\delta'}) f_{\alpha,-\alpha} = \mathfrak{O}$. Es besteht also die Menge $\{\pi'((H_2^{\mathfrak{F}})_{\gamma',\delta'}) f_{\alpha,-\alpha} \mid \gamma' \geq \gamma, \delta' \geq \delta\} \in \pi'(\mathfrak{f}_2^{\mathfrak{F}}) f_{\alpha,-\alpha}$ nur aus dem Nullfunktional. Daraus folgt, daß $\lim \pi'(\mathfrak{f}_2^{\mathfrak{F}}) f_{\alpha,-\alpha}$ existiert und $= 0$ ist. Also gilt $(\mathfrak{Lim}\, \pi'(\mathfrak{f}_2^{\mathfrak{F}})) f_{\alpha,-\alpha} = \mathfrak{O}$. Weiter ist $\| f_{\alpha,-\alpha} \| = f_{\alpha,-\alpha}(I_{\mathfrak{H}^{\mathfrak{F}}}) = 1$. Damit ist 16.4 bewiesen.

Das Spektrum von $H_1^{\mathfrak{F}}$ besteht nur aus Eigenwerten; es sind abzählbar viele, weil $\mathfrak{H}^{\mathfrak{F}}$ separabel ist. Zu jedem Eigenwert α von $H_1^{\mathfrak{F}}$ gehört dann nach 16.4 ein Zustand $f_{\alpha,-\alpha}$ von $\mathfrak{F}$ in $\mathfrak{U}^{\mathfrak{F}}$. Im Zustand $f_{\alpha,-\alpha}$ hat die Energie den "scharfen" Wert α.

§ 17. Über die Möglichkeit zur Beschreibung von Materieerzeugung und -vernichtung durch Modelle mit Zeitoperator.

Sei $\mathfrak{O}$ ein physikalisches System mit den kanonischen Observablen $\{E_\lambda^\nu \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$, $\{F_\lambda^\nu \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, f^{\mathfrak{O}})$. Der Einfachheit wegen wollen wir uns unter $\mathfrak{O}$ ein Einteilchensystem vorstellen und demgemäß $f^{\mathfrak{O}} = 3$ annehmen.

Wir betten $\mathfrak{O}$ durch Hinzunahme einer Zeit- und einer (-1) (Energie)-Observablen in ein physikalisches System $\hat{\mathfrak{F}}$ mit Zeitmessung ein. Es sei $f^{\hat{\mathfrak{F}}} = f^{\mathfrak{O}} + 1 = 4$. Die kanonischen Observablen von $\hat{\mathfrak{F}}$ seien: $\{E_\lambda^\nu \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$, $\{F_\lambda^\nu \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, f^{\hat{\mathfrak{F}}})$. Dann ist $\{E_\lambda^4 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ die Zeit- und $\{F_\lambda^4 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ die (-1) (Energie)-Observable.

Zunächst betrachten wir ein übliches Modell $\mathfrak{U}_1^{\mathfrak{O}}$ der Quantenmechanik für das System $\mathfrak{O}$. Sei Φ ein Zustand von $\mathfrak{O}$ in $\mathfrak{U}_1^{\mathfrak{O}}$. Dann ist zu jedem Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich das Teil-

chen irgendwo im Raum befindet, gleich $(\phi(t), \phi(t)) = 1$. Das Teilchen kann weder verschwinden noch neu entstehen.

Die bekannten Effekte der Materieerzeugung und -vernichtung können also von einem üblichen Modell der Quantenmechanik prinzipiell nicht beschrieben werden. Diese Effekte kommen nur im relativistischen Bereich vor [3, S.109, S.187]. Das ist - neben der fehlenden Lorentz-Invarianz (§ 6, A) - ein weiterer Grund dafür, daß relativistische Systeme durch übliche Modelle nicht ohne weiteres beschrieben werden können.

Wir betrachten nun ein zu $\mathcal{H}$ gehöriges Modell der Quantenmechanik mit Zeitoperator $\mathcal{M}^{\mathcal{H}}$. Im Formalismus dieses Modells erfährt die Zeit keine Auszeichnung gegenüber den Observablen des Ortes. Daher können wir alles für den Ort gültige nun auch auf die Zeit übertragen. Das Teilchen braucht nur innerhalb bestimmter Raumgebiete vorhanden zu sein. Analog dazu braucht es auch nur innerhalb gewisser Zeitspannen zu existieren. Es kann also sowohl verschwinden als auch neu entstehen.

Sei φ ein Zustand von $\mathcal{H}$ in $\mathcal{M}^{\mathcal{H}}$. Für $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}_4$ ist dann $\varphi(R^{\mathcal{H}}(E^1_{\lambda_1}) R^{\mathcal{H}}(E^2_{\lambda_2}) R^{\mathcal{H}}(E^3_{\lambda_3}) R^{\mathcal{H}}(E^4_{\lambda_4}))$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich das Teilchen im Raum-Zeit-Gebiet $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}_4 \mid x_\nu \leq \lambda_\nu, \nu = 1, \ldots, 4\}$ aufhält. Insbesondere erhält man für $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \to \infty$ die Wahrscheinlichkeit $\varphi(R^{\mathcal{H}}(E^4_{\lambda_4}))$ dafür, daß sich das Teilchen in der Zeit von $-\infty$ bis λ_4 irgendwo im Raum aufhält. Es ist also $\varphi(R^{\mathcal{H}}(E^4_{\lambda_4}))$ die Existenzwahrscheinlichkeit für diesen Zeitraum. Sie kann jeden beliebigen Wert zwischen 0 und 1 annehmen, je nachdem, in welchem Zustand φ sich das System befindet. Z.B. kann $\varphi(R^{\mathcal{H}}(E^4_{\lambda_4})) = 0$ für gewisse Zustände φ gelten. Dann ist das Teilchen in der Zeit von $-\infty$ bis λ_4 nicht vorhanden. Für eine beliebige Zeitspanne $[\lambda_4, \lambda'_4]$ ist die Existenzwahrscheinlichkeit des Teilchens gleich $\varphi(R^{\mathcal{H}}(E^4_{\lambda'_4}) - R^{\mathcal{H}}(E^4_{\lambda_4}))$.

Ein Modell mit Zeitoperator vermag also auch das Entstehen und Verschwinden eines Teilchens zu beschreiben.

LITERATUR

[1] N.I.Achieser / I.M. Glasmann, Theorie der linearen Operatoren im Hilbertraum, 1965

[2] F.Engelmann und E.Fick, Die Zeit in der Quantenmechanik, Nuovo Cimento, Suppl. 12 (1959)

[3] F.Hund, Materie als Feld, 1954

[4] G.Ludwig, Die Grundlagen der Quantenmechanik, 1954

[5] W.Maak, Fastperiodische Funktionen, 1950

[6] W.Macke, Thermodynamik und Statistik, 1963

[7] M.A. Neumark, Normierte Algebren, 1959

[8] H.Paul, Über quantenmechanische Zeitoperatoren, Ann. Phys. 7.Folge, 9 (1962)

[9] W.Pauli, Die allgemeinen Prinzipien der Wellenmechanik, Handbuch der Physik, Bd.V, Teil 1 (1958)

[10] E.Schrödinger, Spezielle Relativitätstheorie und Quantenmechanik, Berl.Ber., 238 (1931)

[11] H.Schubert, Topologie, 1964

[12] O. Tamaschke, Über die mathematischen Grundlagen der quantenmechanischen Elektronentheorie in unendlichen Kristallgittern, Ann.Phys. 7.Folge, 8 (1961)

LEBENSLAUF

Am 15. Oktober 1938 wurde ich, Hermann Sohr, als Sohn des Volksschullehrers Karl Sohr und seiner Ehefrau Gertrud in Ringenhain (Lausitz) geboren. Von 1944 bis 1952 besuchte ich die Volksschule in Ringenhain und von 1952 bis zum Abitur 1956 die Friedrich-Schiller-Oberschule in Bautzen. Im Herbst 1956 ging ich nach Westberlin, wo ich in einem Sonderlehrgang 1957 die in der Bundesrepublik geforderte Ergänzungsprüfung zum Abitur ablegte.

An der Freien Universität Berlin begann ich im Wintersemester 1957/58 das Studium der Mathematik und Physik. Vom Wintersemester 1958/59 an bis zur Diplomprüfung im Juli 1965 war ich an der Universität Tübingen immatrikuliert. Zwischendurch, von 1962 bis 1964, war ich bei der IBM in Böblingen tätig, zunächst als Werksstudent und später als Freier Mitarbeiter. Hier habe ich mich vorwiegend mit der Programmierung eines technischen Problems befasst.

Nach der Diplomprüfung habe ich, ermöglicht durch ein Stipendium der Stiftung Volkswagenwerk, unter der Leitung von Herrn Professor Dr. O. Tamaschke an der vorliegenden Dissertation "Modelle der Quantenmechanik mit Zeitoperator" gearbeitet.

Meine akademischen Lehrer waren in Berlin die Herren Professoren A. Dinghas, H. Lassen, H. Meschkowski, H. Ostmann und in Tübingen die Herren Professoren W. Braunbek, B. Huppert, H. Kneser, H. Krüger, M. Müller, G. Pickert, P. Roquette, H. Schubert, O. Tamaschke, W. Vogel und H. Wielandt.

Druckbüro Frau Elly HUTH, 74 Tübingen